

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Національний авіаційний університет**

## **ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ**

**Лабораторний практикум**  
**для студентів напрямів підготовки**  
**6.050801 "Мікро- та наноелектроніка" і**  
**6.050802 "Електронні пристрої та системи"**

**Київ 2013**

УДК 004.383.3(076.5)  
ББК 3 811.722я7  
Ц 752

Укладачі: І. Ф. Бойко, Є. С. Іваницький

Рецензент І. Г. Прокопенко

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № від ).

**Цифрова обробка сигналів:** Лабораторний практикум.  
Ц 752 / Уклад.: І. Ф. Бойко, Є. С. Іваницький. – К.: НАУ, 2013. – 45 с.

Уміщує десять лабораторних робіт, присвячених експериментальному дослідженню з використанням ПЕОМ лінійних дискретних систем, зокрема цифрових фільтрів, в часовій та частотній областях, нелінійних дискретних систем на базі функціональних поліномів Вольтерра. Розглядаються методи генерації та статистичного аналізу проходження дискретних випадкових сигналів через лінійні системи. Досліджуються шуми квантування в системах цифрової обробки сигналів (ЦОС).

Для студентів напрямів підготовки 6.050801 "Мікро- та наноелектроніка" і 6.050802 "Електронні пристрої та системи".

## Вступ

Метою лабораторних робіт є набуття студентами навиків та вмій у проведенні експериментальних досліджень при вивченні методів опису лінійних та нелінійних дискретних систем у часовій та частотній областях, синтезу цифрових фільтрів та дослідження їх характеристик, шумів квантування в системах ЦОС, застосування останніх при обробці цифрових сигналів, зокрема, при адаптивній обробці, порівнянні експериментальних та розрахункових результатів, а також у поглибленні та конкретизації програмного матеріалу, що вивчається в лекційній частині дисципліни «Цифрова обробка сигналів». Лабораторні роботи виконуються студентами із використанням ПЕОМ (в програмному середовищі MATCAD) під керівництвом викладача.

На початку лабораторних занять студенти в лабораторії проходять інструктаж з техніки безпеки, правил якої зобов'язані дотримуватися в ході виконання робіт.

Перед початком кожної лабораторної роботи студенти повинні:

- ознайомитись з описом роботи, завданням на виконання лабораторної роботи та методикою і послідовністю проведення експериментів, які пропонуються;

- виконати, якщо це потрібно, попередні розрахунки;
- підготувати необхідні бланки, таблиці для запису експериментальних даних та оформлення протоколів досліджень.

Протокол лабораторної роботи складається кожним студентом самостійно і повинен містити:

- назву та мету лабораторної роботи;
- запис та, якщо це потрібно, зображення вихідних даних;
- результати та таблиці попередніх розрахунків;
- таблиці вимірювань і обчислень, отримані в ході експериментів, та побудовані у відповідності з ними графіки;
- висновки з обмірковуванням результатів роботи.

Готовність студента до виконання лабораторної роботи контролюється викладачем, який проводить заняття, перед початком експерименту.

Повністю оформлений звіт з лабораторної роботи подається викладачеві та захищається студентом на наступному після виконання роботи занятті.

# Лабораторна робота 1

## ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК 1-го та 2-го ПОРЯДКІВ ЛДС У ЧАСІ

**Мета роботи:** дослідити властивості лінійних дискретних систем (ЛДС) у часовій області на базі ланок 1-го та 2-го порядків. Зокрема, ознайомитися на практиці з означеннями та властивостями часових характеристик ЛДС, а саме імпульсної та перехідної характеристик, принципом суперпозиції ЛДС.

### Короткі теоретичні відомості

Будь-яка ЛДС може бути описана різницевою рівнянням виду:

$$y(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k x(n-k) - \sum_{l=1}^L \beta_l y(n-l), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

де  $x(n)$  і  $y(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  - значення вхідного та вихідного сигналів ЛДС відповідно;  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$  і  $\beta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  - постійні коефіцієнти;  $n$  - нормований відносно інтервалу дискретизації  $\Delta$  дискретний час. Максимальне із чисел  $K$ ,  $L$  в (1.1) визначає порядок ЛДС.

Рівняння (1.1) по суті є алгоритмом, згідно з яким ЛДС виконує обробку дискретних сигналів.

Зауважимо, що для реально існуючих систем повинна виконуватись умова  $L \geq K$ .

Різницева рівняння (1.1) описує *рекурсивні* ЛДС, у яких для формування відліку вихідного сигналу  $y(n)$  у момент часу  $n$  враховуються окрім значень вхідного сигналу  $x(n)$  у той же момент часу  $n$  та його попередніх значень  $x(n-k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ , також ряд попередніх значень вихідного сигналу  $y(n-l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ . Іншими словами, у рекурсивних ЛДС наявний свого роду зворотній зв'язок.

Якщо в рівнянні (1.1) всі коефіцієнти  $\beta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  дорівнюють нулеві, то отримаємо різницева рівняння

$$y(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k x(n-k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

що описує *нерекурсивну* ЛДС.

Основними характеристиками ЛДС у часовій області є імпульсна  $h(n)$  та перехідна  $g(n)$  характеристики.

*Імпульсною характеристикою* ЛДС називають її реакцію на дію одиничного імпульсу  $\delta(n)$  коли система знаходиться у нульовому стані.

*Одиничним імпульсом* називають дискретний сигнал  $\delta(n)$ , який при всіх значеннях  $n \neq 0$  дорівнює нулеві, а при  $n = 0$  дорівнює 1, тобто

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Отже для рекурсивної системи імпульсна характеристика

$$h(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta(n-k) - \sum_{l=1}^L \beta_l h(n-l), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Особливістю імпульсної характеристики рекурсивної ЛДС (1.4) є те, що вона нескінченно протяжна у часі, тобто, в усякому разі теоретично,  $h(n) \neq 0$  при всіх значеннях  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На цій підставі такі ЛДС отримали назву *систем з нескінченною імпульсною характеристикою* – НІХ-системи.

Для нерекурсивних ЛДС, згідно з (1.2), імпульсна характеристика

$$h(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta(n-k), \quad (1.5)$$

Враховуючи в (1.5) означення одиничного імпульсу (1.3), бачимо, що імпульсна характеристика нерекурсивних ЛДС є скінченною і визначається виключно значеннями коефіцієнтів  $\alpha_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ , що відображено в табл. 1.1.

*Таблиця 1.1 - Імпульсна характеристика нерекурсивної ЛДС*

$n$	0	1	2	...	$K-1$	$K$
$h(n)$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	...	$\alpha_{K-1}$	$\alpha_K$

У зв'язку з цим нерекурсивні ЛДС носять ще назву *систем зі скінченною імпульсною характеристикою* - СІХ-системи.

На основі імпульсної характеристики можна записати вираз, що пов'язує вхід і вихід ЛДС, а саме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)x(k), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

Як бачимо, вихідний сигнал  $y(n)$  ЛДС є дискретною згорткою її імпульсної характеристики  $h(n)$  та вхідного сигналу  $x(n)$ .

Зауважимо, що вираз (1.6) має досить загальний вигляд. Якщо врахувати, що для реально існуючих систем імпульсна характеристика  $h(n) = 0$  при  $n < 0$  і до того ж реальні сигнали є скінченими у часі, тобто

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & 0 > n > N-1, \end{cases}$$

то співвідношення (1.6) можна записати так:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(n-k)x(k) = \sum_{k=0}^n x(n-k)x(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.7)$$

Базовими елементами ЛДС є ланки 1-го та 2-го порядків. Для ланки 2-го порядку, у відповідності зі співвідношенням (1.1),  $L = 2$ , а  $K$  (для фізично існуючих систем) може набувати одного із трьох значень: або 2, або 1, або 0. Тому різницеве рівняння (1.1) для НІХ-ланок 2-го порядку можуть набувати одного із трьох виглядів: або

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 \alpha_k x(n-k) - \sum_{l=1}^2 \beta_l y(n-l), \quad \text{або} \quad y(n) = \sum_{k=0}^1 \alpha_k x(n-k) - \sum_{l=1}^2 \beta_l y(n-l), \quad \text{або} \quad y(n) = \alpha_0 x(n) - \sum_{l=1}^2 \beta_l y(n-l).$$

Ланки 1-го порядку отримаємо, якщо в (1.1) покласти  $L = 1$ , а  $K$  може дорівнювати або 1, або 0. Тоді можна записати такі співвідношення для різницевих рівнянь НІХ-ланок 1-го порядку:

$$y(n) = \sum_{k=0}^1 \alpha_k x(n-k) - \beta_1 y(n-1) \quad \text{і} \quad y(n) = \alpha_0 x(n) - \beta_1 y(n-1).$$

Різницеві рівняння ланок 1-го та 2-го порядків для СІХ-систем отримаємо із співвідношення (1.2). Для ланки 2-го порядку маємо

$$y(n) = \sum_{k=0}^2 \alpha_k x(n-k),$$

а для ланки 1-го порядку

$$y(n) = \alpha_0 x(n) + \alpha_1 x(n-1).$$

Перехідною характеристикою  $g(n)$  ЛДС називають її реакцію на

на дію одиничного дискретного стрибка

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

При цьому система повинна знаходитись у нульовому стані.

Для НІХ-систем перехідна характеристика

$$g(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \sigma(n-k) - \sum_{l=1}^L \beta_l g(n-l), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Для СІХ-систем

$$g(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \sigma(n-k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

На відміну від імпульсної характеристики  $h(n)$  перехідна характеристика  $g(n)$  має нескінченну кількість значень навіть для СІХ-систем, що і відображено в співвідношенні (1.9) при означенні області існування функції. Хоча слід зауважити, що функція  $g(n)$  (1.9) після моменту часу  $n = K$  приймає однакові значення, тобто

$$g(n) = \sum_{k=0}^K \alpha_k, \quad n \geq K.$$

Вирази для перехідних характеристик ланок 1-го та 2-го порядків для НІХ- і СІХ-систем легко отримати, скориставшись співвідношеннями (1.8) і (1.9). Залишаємо цю задачу на самостійну роботу студентів.

Для фізично існуючих систем перехідна характеристика  $g(n) = 0$  при  $n < 0$ .

Зв'язок між вхідним сигналом  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  і вихідним  $y(n)$  ЛДС на основі перехідної характеристики запишеться так:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \nabla_n g(n-k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

де  $\nabla_n g(n-k) = g(n-k) - g(n-1-k)$ .

**Література:** [1, стор. 59 - 77].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. Змоделювати на основі різницевого рівняння і дослідити перехідну та імпульсну характеристики ланок 1-го та 2-го порядків СІХ-систем.

2. Змоделювати на основі різницевого рівняння і дослідити перехідну та імпульсну характеристики ланок 1-го та 2-го порядків НІХ-систем.

3. Дослідити проходження дискретних сигналів через ланки 1-го та 2-го порядків СІХ- і НІХ-систем, зокрема справедливості принципу суперпозиції.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD.

1. На основі різницевого рівняння 1-го порядку СІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень:

1.1. Розрахувати та зобразити імпульсну характеристику.

1.2. Розрахувати та зобразити перехідну характеристику.

1.3. Розрахувати та зобразити реакцію на дію гармонічного коливання  $x(n) = \sin(\omega\Delta n)$ .

1.4. Розрахувати та зобразити реакцію на дію гармонічного коливання  $x_1(n) = \sin(2\omega\Delta n)$ .

1.5. Розрахувати та зобразити реакцію на дію гармонічного коливання  $x_2(n) = \cos(\omega\Delta n)$ .

1.6. Розрахувати та зобразити реакцію на дію суми гармонічних коливань  $s(n) = x_1(n) + x_2(n)$ .

2. На основі різницевого рівняння 2-го порядку СІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.6.

3. На основі різницевого рівняння 1-го порядку НІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.6.

4. На основі різницевого рівняння 2-го порядку НІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.6.

5. Проаналізувати отримані результати за пп. 1 – 4 і зробити висновки.

### **Контрольні питання**

1. Запишіть різницеве рівняння загального вигляду для НІХ-системи.



2. Запишіть різницеве рівняння загального вигляду для нерекурсивної ЛДС.
3. Дайте означення імпульсної характеристики ЛДС.
4. Чим відрізняються імпульсні характеристики рекурсивних і нерекурсивних ЛДС?
5. Дайте означення перехідної характеристики ЛДС.
6. Запишіть співвідношення між імпульсною і перехідною характеристиками ЛДС.
7. Запишіть умови фізичної реалізованості ЛДС в термінах імпульсної та перехідної характеристик.
8. Запишіть вираз для імпульсної характеристики ланки 2-го порядку СІХ- і НІХ-систем.
9. Запишіть вираз для імпульсної характеристики ланки 1-го порядку СІХ- і НІХ-систем.
10. Запишіть вираз, що характеризує зв'язок між входом і виходом для НІХ-системи на основі імпульсної характеристики.

## **Лабораторна робота 2** **ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК 1-го та 2-го ПОРЯДКІВ ЛДС У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ**

**Мета роботи:** дослідити властивості ЛДС у частотній області на базі ланок 1-го та 2-го порядків. Зокрема, ознайомитися на практиці з означеннями та властивостями частотних характеристик ЛДС, а саме, частотного коефіцієнта передачі, амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) та фазочастотної характеристики (ФЧХ), спектральним методом аналізу ЛДС.

### **Короткі теоретичні відомості**

Розглянемо деяку дискретну лінійну систему (див. рис. 2.1), на вході якої діє дискретний сигнал  $x(n\Delta)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , де  $\Delta$  - інтервал дискретизації. На виході маємо реакцію  $y(n\Delta)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Будемо вважати, що вхідний і вихідний сигнали ЛДС задовольняють умовам існування дискретного перетворення Фур'є [1], тобто існують спектральні щільності

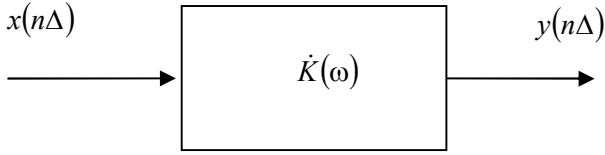


Рис. 2.1. Дискретна лінійна система

$$\dot{X}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta) \exp(-i\omega n\Delta) \text{ і } \dot{Y}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n\Delta) \exp(-i\omega n\Delta).$$

Тоді можна ввести таке

**Означення.** Відношення спектральної щільності  $\dot{Y}(\omega)$  реакції ЛДС до спектральної щільності її впливу  $\dot{X}(\omega)$ , тобто

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}, \quad (2.1)$$

носить назву *частотного коефіцієнта передачі* лінійної дискретної системи.

Частотний коефіцієнт передачі  $\dot{K}(\omega)$  - це комплексно значна функція, що відображає зв'язок між вхідним і вихідним сигналами ЛДС, зображеними у частотній області своїми спектрами, тобто

$$\dot{Y}(\omega) = \dot{K}(\omega)\dot{X}(\omega). \quad (2.2)$$

Оскільки спектри  $\dot{X}(\omega)$  і  $\dot{Y}(\omega)$  - це спектри дискретних сигналів, то вони є періодичними функціями частоти  $\omega$  і, в нашому випадку, мають один і той же частотний період  $\omega_a = \frac{2\pi}{\Delta}$ . Тоді і їх

відношення (2.1) теж буде представляти собою періодичну функцію частоти з тим же періодом  $\omega_d$ . Отже частотний коефіцієнт передачі ЛДС є періодичною функцією частоти з періодом  $\omega_a = \frac{2\pi}{\Delta}$ .

Тому функцію  $\dot{K}(\omega)$  можна розглядати на частотному інтервалі, що дорівнює періодові, тобто  $0 \leq \omega < \frac{2\pi}{\Delta}$ , або  $-\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega < \frac{\pi}{\Delta}$ .

Частотний коефіцієнт передачі  $\dot{K}(\omega)$  стаціонарної ЛДС пов'язаний з її імпульсною характеристикою  $h(n\Delta)$  дискретним перетворенням Фур'є

$$\dot{K}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \exp(-i\omega n\Delta). \quad (2.3)$$

Існує і обернене перетворення

$$h(n\Delta) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \dot{K}(\omega) e^{i\omega n\Delta} d\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Частотний коефіцієнт передачі  $\dot{K}(\omega)$  ЛДС можна отримати на основі її системної функції  $\dot{H}(z)$ , якщо виконати заміну змінної  $z = e^{i\omega\Delta}$ , тобто

$$\dot{H}(z) \Big|_{z=e^{i\omega\Delta}} = \dot{K}(\omega). \quad (2.4)$$

Співвідношення (2.4) дозволяє відразу отримати загальні вирази для частотних коефіцієнтів передачі рекурсивних і не рекурсивних ЛДС, скориставшись відповідними виразами для їх системних функцій. Для рекурсивної ЛДС маємо

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l e^{-i\omega l\Delta}}{1 + \sum_{j=1}^K \alpha_j e^{-i\omega j\Delta}}. \quad (2.5)$$

Для нерекурсивної ЛДС маємо такий вираз:

$$\dot{K}(\omega) = \sum_{l=0}^M \beta_l e^{-i\omega l\Delta}. \quad (2.6)$$

Частотний коефіцієнт передачі  $\dot{K}(\omega)$  є комплексною функцією, яку можна подати у показниковій формі:

$$\dot{K}(\omega) = |\dot{K}(\omega)| e^{i\varphi_K(\omega)}, \quad (2.7)$$

де  $|\dot{K}(\omega)|$  - модуль частотного коефіцієнта передачі, який носить назву *амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) ЛДС*;  $\varphi_K(\omega)$  - аргумент частотного коефіцієнта передачі, який носить назву *фазочастотної характеристики (ФЧХ) ЛДС*.

Звернемось до представлення частотного коефіцієнта передачі у формі (2.3). Розклавши експоненту з уявним показником на дійсну і уявну частини, можемо записати

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \exp(-i\omega n\Delta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \cos(\omega n\Delta) - i \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \sin(\omega n\Delta) = D(\omega) - iM(\omega), \end{aligned}$$

де введено позначення:

$$D(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \cos(\omega n\Delta)$$

дійсна частина частотного коефіцієнта передачі і

$$M(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta) \sin(\omega n\Delta)$$

уявна частина частотного коефіцієнта передачі. Тоді АЧХ лінійної дискретної системи можемо записати так:

$$|\dot{K}(\omega)| = \sqrt{D^2(\omega) + M^2(\omega)} = \sqrt{\dot{K}(\omega)\dot{K}^*(\omega)}. \quad (2.8)$$

В свою чергу для ФЧХ отримаємо такий вираз:

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg \frac{M(\omega)}{D(\omega)}. \quad (2.9)$$

Із такого означення АЧХ і ФЧХ випливає, що АЧХ є парною функцією частоти, тобто  $|\dot{K}(\omega)| = |\dot{K}(-\omega)|$ , а ФЧХ – непарною:  $\varphi_K(\omega) = -\varphi_K(-\omega)$ .

АЧХ і ФЧХ лінійної дискретної системи, так само як і частотний коефіцієнт передачі, є періодичними функціями частоти, період яких визначається частотою дискретизації  $\omega_a = \frac{2\pi}{\Delta}$ . Тому і частотний коефіцієнт передачі (про що вже говорилося вище), і АЧХ і ФЧХ можна розглядати на вісі частот лише в межах частотного інтервалу, що дорівнює періодові, тобто  $0 \leq \omega < \frac{2\pi}{\Delta}$ , або  $-\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega < \frac{\pi}{\Delta}$ . Більше того, враховуючи парність АЧХ  $|\dot{K}(\omega)|$  і не-

парність ФЧХ  $\varphi_K(\omega)$ , їх можна розглядати на половині періоду, а саме, наприклад, на інтервалі  $0 \leq \omega < \frac{\pi}{\Delta}$ .

Запишемо спектри дискретних сигналів  $\dot{X}(\omega)$  і  $\dot{Y}(\omega)$  на вході і виході ЛДС у показниковій формі. Для вхідного сигналу

$$\dot{X}(\omega) = |\dot{X}(\omega)| e^{i\Theta_X(\omega)},$$

де модуль  $|\dot{X}(\omega)|$  представляє собою АЧС сигналу  $x(n)$ , а аргумент  $\Theta_X(\omega)$  – його ФЧС.

Для вихідного сигналу

$$\dot{Y}(\omega) = |\dot{Y}(\omega)| e^{i\Theta_Y(\omega)},$$

де модуль  $|\dot{Y}(\omega)|$  представляє собою АЧС сигналу  $y(n)$ , а аргумент  $\Theta_Y(\omega)$  – його ФЧС.

Тоді згідно з формулами (3.102) і (3.108) можемо записати

$$\begin{aligned} \dot{Y}(\omega) &= \dot{X}(\omega) \dot{K}(\omega) = |\dot{X}(\omega)| e^{i\Theta_X(\omega)} |\dot{K}(\omega)| e^{i\varphi_K(\omega)} = \\ &= |\dot{X}(\omega)| |\dot{K}(\omega)| e^{i[\Theta_X(\omega) + \varphi_K(\omega)]} = |\dot{Y}(\omega)| e^{i\Theta_Y(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким чином, згідно з (2.10) модулі спектра вхідного сигналу і частотного коефіцієнта передачі перемножуються  $|\dot{Y}(\omega)| = |\dot{X}(\omega)| \cdot |\dot{K}(\omega)|$ , тобто АЧС вихідного сигналу дорівнює добутку АЧС впливу і АЧХ ЛДС. В той же час аргументи спектра вхідного сигналу і частотного коефіцієнта передачі складаються, тобто ФЧС вихідного сигналу дорівнює сумі ФЧС впливу і ФЧХ ЛДС  $\Theta_Y(\omega) = \Theta_X(\omega) + \varphi_K(\omega)$ .

На основі співвідношення (2.10) можна з'ясувати фізичну суть частотних характеристик стаціонарних ЛДС: АЧХ і ФЧХ. Згідно з теорією перетворення Фур'є дискретний сигнал може бути представлений у вигляді суми гармонічних коливань, кожне з яких визначається своєю частотою, амплітудою (АЧС) і початковою фазою (ФЧС). Оскільки ЛДС задовольняє принципу суперпозиції, то вона «обробляє» кожну гармонічну складову окремо, незалежно від інших. Гармонічні коливання є власними функціями лінійного оператора, що описує ЛДС. Тому при проходженні гармонічного коливання через лінійну систему на виході ми знову маємо гармонічне

коливання з тією ж частотою, але з іншими амплітудою і початковою фазою. Саме частотні характеристики ЛДС і визначають, як змінюються амплітуда і фаза. Точніше, АЧХ ЛДС визначає зміну амплітуд гармонічних коливань на відповідних частотах, а ФЧХ визначає зміну початкових фаз, що і найшло відображення в формулі (2.10).

Отже стаціонарні лінійні системи, в тому числі і дискретні, не «збагачують» спектр сигналу на виході, тобто вони не створюють нові гармонічні коливання на виході системи. При обробці сигналів вони лише змінюють певним чином, що визначається частотним коефіцієнтом передачі  $\dot{K}(\omega)$  ЛДС, амплітуди і фази гармонік, що діють на вході. «Збагачення» спектру дискретного вхідного сигналу може бути отримано за допомогою нестационарних (параметричних) ЛДС, або на основі нелінійних дискретних систем.

Виконаємо в правій частині співвідношення (2.5) заміну комплексних експонент на основі формули Ейлера:  $e^{-i\omega k\Delta} = \cos \omega k\Delta - i \sin \omega k\Delta$ . Тоді отримаємо:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l (\cos \omega l\Delta - i \sin \omega l\Delta)}{1 + \sum_{j=1}^K \alpha_j (\cos \omega j\Delta - i \sin \omega j\Delta)}.$$

В чисельникові і знаменникові правої частини останнього співвідношення виділимо їх дійсні і уявні частини:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l \cos \omega l\Delta - i \sum_{l=0}^M \beta_l \sin \omega l\Delta}{\left(1 + \sum_{j=1}^K \alpha_j \cos \omega j\Delta\right) - i \sum_{j=1}^K \alpha_j \sin \omega j\Delta}. \quad (2.11)$$

Тепер можемо записати вираз для АЧХ рекурсивної ЛДС як відношення модулів чисельника і знаменника правої частини співвідношення (2.11), тобто

$$|\dot{K}(\omega)| = \sqrt{\frac{\left(\sum_{l=0}^M \beta_l \cos \omega l\Delta\right)^2 + \left(\sum_{l=0}^M \beta_l \sin \omega l\Delta\right)^2}{\left(1 + \sum_{j=1}^K \alpha_j \cos \omega j\Delta\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^K \alpha_j \sin \omega j\Delta\right)^2}}. \quad (2.12)$$

ФЧХ рекурсивної ЛДС або аргумент частотного коефіцієнта передачі  $\dot{K}(\omega)$ , представленого виразом (2.11) представляє собою різницю аргументів чисельника і знаменника цього співвідношення. Отже

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l \sin \omega l \Delta}{\sum_{l=0}^M \beta_l \cos \omega l \Delta} + \arctg \frac{\sum_{j=1}^K \alpha_j \sin \omega j \Delta}{1 + \sum_{j=1}^M \alpha_j \cos \omega j \Delta}. \quad (2.13)$$

Із співвідношень (2.12) і (2.13) випливає, що і АЧХ і ФЧХ рекурсивної ЛДС повністю визначаються ваговими коефіцієнтами  $\beta_l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, M$  нерекурсивної частини і  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, K$  рекурсивної частини алгоритму роботи системи (1.1), а також значеннями чисел  $M$  і  $K$ , що задають порядок дискретної системи. Інтервал дискретизації  $\Delta$  визначає період повторення частотних характеристик ЛДС.

Аналогічним чином, використовуючи співвідношення (2.6), для нерекурсивної ЛДС маємо: для АЧС

$$|\dot{K}(\omega)| = \sqrt{\left( \sum_{l=0}^M \beta_l \cos \omega l \Delta \right)^2 + \left( \sum_{l=0}^M \beta_l \sin \omega l \Delta \right)^2} \quad \text{і для ФЧС}$$

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg \frac{\sum_{l=0}^M \beta_l \sin \omega l \Delta}{\sum_{l=0}^M \beta_l \cos \omega l \Delta}.$$

Отже, як бачимо із співвідношень (2.14), (2.15), для нерекурсивних ЛДС частотні характеристики повністю визначаються значеннями вагових коефіцієнтів  $\beta_l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, M$ .

Опис ланок 1-го та 2-го порядків у частотній області, тобто отримати вирази для частотного коефіцієнта передачі, АЧХ і ФЧХ легко отримати, скориставшись співвідношеннями (2.5), (2.6), (2.12) – (2.15). Для цього слід врахувати, що для ланок 2-го порядку  $M \leq 2$ , а  $K = 2$ . Для ланок 1-го порядку  $M \leq 1$ , а  $K = 1$ .

**Література:** [1, стор. 99 - 143].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. Змодельовати на основі різничевого рівняння та дослідити

частотні характеристики (частотний коефіцієнт передачі, АЧХ і ФЧХ) ланок 1-го та 2-го порядків СІХ-систем.

2. Змоделювати на основі різницевого рівняння та дослідити частотні характеристики (частотний коефіцієнт передачі, АЧХ і ФЧХ) ланок 1-го та 2-го порядків НІХ-систем.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD.

1. На основі системної функції ланки 1-го порядку СІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень (функція *freqz*) розрахувати частотний коефіцієнт передачі. За результатами розрахунку частотного коефіцієнта передачі за допомогою функцій *abs*, *anglen* і *grpdelay*:

1.1. Розрахувати та зобразити амплітудно-частотну характеристику ланки.

1.2. Розрахувати та зобразити фазочастотну характеристику ланки.

1.3. Розрахувати та побудувати графік групового часу затримки ланки.

2. На основі системної функції ланки 2-го порядку СІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень (функція *freqz*) розрахувати частотний коефіцієнт передачі. За результатами розрахунку частотного коефіцієнта передачі за допомогою функцій *abs*, *anglen* і *grpdelay* виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.3.

3. На основі системної функції ланки 1-го порядку НІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень (функція *freqz*) розрахувати частотний коефіцієнт передачі. За результатами розрахунку частотного коефіцієнта передачі за допомогою функцій *abs*, *anglen* і *grpdelay* виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.3.

4. На основі системної функції ланки 2-го порядку НІХ-системи (задається викладачем) в MATCAD в режимі прямих обчислень (функція *freqz*) розрахувати частотний коефіцієнт передачі. За результатами розрахунку частотного коефіцієнта передачі за допомогою функцій *abs*, *anglen* і *grpdelay* виконати розрахунки, аналогічні пп. 1.1 – 1.3.



5. Проаналізувати отримані результати за пп. 1 – 4 і зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Дайте означення частотного коефіцієнта передачі ЛДС.
2. Як знайти частотний коефіцієнт передачі ЛДС, коли відома її імпульсна характеристика?
3. Дайте означення АЧХ і ФЧХ лінійної дискретної системи.
4. Запишіть АЧХ ланки другого порядку для НІХ-системи.
5. Запишіть формулу, що пов'язує частотний коефіцієнт передачі і системну функцію ЛДС.
6. Наведіть вираз для ФЧХ ланки першого порядку НІХ-системи.
7. У чому полягає основна відмінність між частотними коефіцієнтами передачі ЛДС і аналогової лінійної системи?
8. Чим визначається період за частотою частотного коефіцієнта передачі ЛДС?

## Лабораторна робота 3 ГЕНЕРУВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЙ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЛДС

**Мета роботи:** ознайомитись на практиці з методами генерування реалізацій дискретних випадкових сигналів ЛДС, дослідити їх статистичні характеристики (оцінки математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта кореляції, побудова гістограми).

### Короткі теоретичні відомості

Розглянемо нерекурсивну ЛДС  $K$ -го порядку, яка у нормованому часі описується різницевим рівнянням такого вигляду:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_K x(n-K), \quad (3.1)$$

де  $y(n)$  - вихідний сигнал системи;  $x(n)$  - вхідний вплив на систему;  $\{a_0, a_1, \dots, a_K\}$  - коефіцієнти системи.

Якщо в якості вхідного впливу на таку систему застосувати дискретний білий шум  $\eta(n)$ , то на основі співвідношення (3.1) отримаємо

$$\xi(n) = a_0 \eta(n) + a_1 \eta(n-1) + \dots + a_K \eta(n-K). \quad (3.2)$$

Отриманий дискретний випадковий процес (3.2) носить назву *процесу ковзного середнього* і утворюється він на виході нерекурсивної ЛДС при подачі на її вхід дискретного білого шуму.

Імпульсна характеристика ЛДС, на виході якої із дискретного білого шуму  $\eta(n)$  формуються реалізації процесу ковзного середнього (3.2), має вигляд:

$$h(0) = a_0, h(1) = a_1, h(2) = a_2, \dots, h(K) = a_K \text{ і } h(n) = 0 \text{ коли } n > K.$$

Системна функція такої системи

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_K z^{-K}.$$

Часто також застосовується *рекурентний метод* формування реалізацій дискретного випадкового процесу на основі різницевого рівняння

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_K x(n-K) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) - \dots - b_M y(n-M),$$

яке є алгоритмом роботи рекурсивної ЛДС.

Якщо на вході такої дискретної системи діє дискретний білий шум  $\eta(n)$ , то процес на виході

$$\xi(n) = a_0 \eta(n) + a_1 \eta(n-1) + \dots + a_K \eta(n-K) - b_1 \xi(n-1) - b_2 \xi(n-2) - \dots - b_M \xi(n-M). \quad (3.3)$$

Процеси, що мають вигляд (3.3) носять назву *процесів авторегресії – ковзного середнього*.

Системна функція рекурсивної ЛДС, що формує реалізації дискретного випадкового процесу авторегресії – ковзного середнього  $\xi(n)$  (3.3), має вигляд:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_K z^{-K}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}.$$

Оскільки для рекурсивної ЛДС імпульсна характеристика має нескінчену кількість відліків (в усякому разі теоретично), то всі вони не можуть бути означені в явному вигляді через коефіцієнти  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_K\}$  і  $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_M\}$ , то запишемо явні вирази лише для декількох перших відліків:

$$h(0) = a_0, h(1) = a_1 - b_1 a_0, h(2) = a_2 - b_2(a_1 - b_1 a_0), \\ h(3) = a_3 - b_3[a_2 - b_2(a_1 - b_1 a_0)], \dots$$

**Література:** [1, стор. 271 - 278], [4, стор. 55 - 95].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. На основі нерекурсивної ЛДС змоделювати випадковий процес ковзного середнього та отримати його реалізацію. Дослідити залежність статистичних характеристики отриманого процесу від коефіцієнтів ЛДС та її порядку. Для цього знайти оцінки середнього, дисперсії, коефіцієнта кореляції, побудувати гістограму на основі отриманої реалізації процесу ковзного середнього.

2. Виконати моделювання рекурсивною ЛДС дискретного випадкового процесу, отримати його реалізацію та дослідити вплив на статистичні характеристики процесу коефіцієнтів ЛДС та її порядку.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD та виконати наступні пункти роботи.

1. Отримати реалізацію випадкового дискретного процесу шляхом генерації рівномірно розподілених чисел за допомогою функції *rand*.

2. Отриману в п. 1 реалізацію пропустити через нерекурсивну ЛДС першого порядку (коефіцієнти системи задаються викладачем) за допомогою функції *filter* і отримати на виході реалізацію процесу ковзного середнього.

2.1. Zobrazити та порівняти реалізації процесів на вході і виході ЛДС.

2.2. За допомогою функцій *mean*, *std* і *xcorr* розрахувати оцінки математичного сподівання, дисперсії і кореляційної функції процесу ковзного середнього.

2.3. За допомогою функції *hist* побудувати гістограму реалізації процесу ковзного середнього.

3. Вказані в пп. 2; 2.1, 2.2, 2.3 дослідження виконати для нерекурсивної ЛДС другого порядку (коефіцієнти системи задаються викладачем).

4. Отриману в п. 1 реалізацію пропустити через рекурсивну ЛДС першого порядку (коефіцієнти системи задаються викладачем) за допомогою функції *filter* і отримати реалізацію процесу авторегресії-ковзного середнього та виконати дослідження, аналогічні пп. 2.1, 2.2, 2.3.

5. Вказані в п. 4 дослідження виконати для рекурсивної ЛДС другого порядку (коефіцієнти системи задаються викладачем).

6. Отримати реалізацію дискретного білого шуму з нормальним розподілом за допомогою функції *randn* і виконати дослідження, аналогічні пп. 2; 2.1, 2.2, 2.3 ; 3; 4; 5.

7. Проаналізувати отримані результати за пп. 1 – 6 і зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Запишіть алгоритм формування реалізації процесу ковзного середнього.

2. На основі якого процесу формується дискретний випадковий процес ковзного середнього?

3. Дайте означення дискретного процесу типу білого шуму.

4. На основі якої ЛДС формується процес ковзного середнього.

5. Дайте означення математичного сподівання випадкового процесу.

6. Запишіть щільність розподілу ймовірностей для нормального процесу.

7. Яка ЛДС формує процес авто регресії – ковзного середнього при дії на вході білого шуму ?

8. Що собою представляє гістограма ?

9. Дайте означення кореляційної функції випадкового процесу..

10. Що собою представляє кореляційна функція процесу типу білого шуму ?

### Лабораторна робота 4

## АНАЛІЗ ПРОХОДЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛДС

**Мета роботи:** ознайомитись на практиці з методами стохастичного аналізу стаціонарних ЛДС при дії на вході дискретних випадкових сигналів.

### Короткі теоретичні відомості

Розглянемо деяку ЛДС (див. рис. 4.1), на вході якої діє дискретний випадковий процес  $\xi(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , де  $n$  - нормований відносно інтервалу дискретизації час. Відомі розподіли ймовірностей вхідного процесу  $\xi(n)$  та імпульсна характеристика

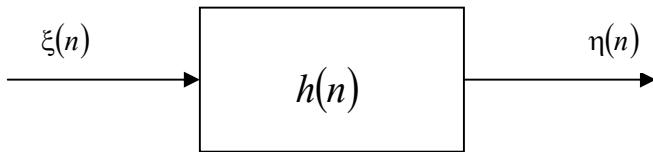


Рис. 4.1. Лінійна дискретна система

$h(n)$  ЛДС. Потрібно знайти моментні функції (математичне сподівання, дисперсію, кореляційну функцію) процесу на виході  $\eta(n)$ . Таке дослідження процесу на виході ЛДС називають стохастичним аналізом в рамках кореляційної теорії.

Формально для відгуку ЛДС можемо записати:

$$\eta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m)\xi(m). \quad (4.1)$$

Введемо позначення для математичних сподівань:  $M\xi(n) = a_{\xi}(n)$  і  $M\eta(n) = a_{\eta}(n)$ . Тоді можемо записати:

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)a_{\xi}(m), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Отже, згідно зі співвідношенням (4.2), математичне сподівання відгуку ЛДС у певний момент часу  $n$  дорівнює зваженій сумі значень математичного сподівання вхідного процесу. Роль вагових коефіцієнтів відіграють відповідні значення імпульсної характеристики ЛДС.

Значимо, що згідно з умовою фізичної можливості  $h(n) = 0$  коли  $n > 0$ . Тому в (4.2) всі доданки з  $m > n$  дорівнюють нулеві, тобто можна записати

$$a_{\eta}(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)a_{\xi}(m), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

**Кореляційна функція відгуку ЛДС.** Перейдемо тепер безпосередньо до розгляду кореляційної функції процесу на виході ЛДС. При цьому дисперсію зможемо знайти як частинний випадок кореляційної функції коли зсув між значеннями відгуку дорівнює нулеві.

Оскільки при знаходженні кореляційної функції випадкового процесу використовується процедура центрування останнього, то спершу розглянемо представлення центрованого процесу на виході ЛДС. Центрований дискретний процес на виході ЛДС позначимо так:

$$\dot{\eta}(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\dot{\eta}(n) = \eta(n) - a_{\eta}(n)$ . Тепер, використовуючи співвідношення (4.1) і (4.2), можемо записати

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(n) &= \eta(n) - a_{\eta}(n) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m)\xi(m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m)a_{\xi}(m) = \end{aligned}$$

отримаємо процес з нульовим математичним сподіванням.

Тоді, враховуючи означення для кореляційної функції відгуку ЛДС, маємо

$$\begin{aligned} R_{\dot{\eta}}(n_1, n_2) &= M[\dot{\eta}(n_1)\dot{\eta}(n_2)] = \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{n_1} \sum_{m_2=-\infty}^{n_2} h(n_1 - m_1)h(n_2 - m_2)R_{\xi}(m_1, m_2) \\ & \quad n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

для стаціонарних ЛДС.

Нагадаємо тепер, що коли для кореляційної функції  $R(n_1, n_2)$  деякого дискретного процесу покласти  $n_1 = n_2 = n$ , то отримуємо дисперсію цього процесу  $D(n)$ . Таким чином, використовуючи отриманий вище вираз (4.4) для кореляційної функції, можемо записати співвідношення для дисперсії відгуку ЛДС:

$$D_{\dot{\eta}}(n) = \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2=0}^n h(n - m_1)h(n - m_2)R_{\xi}(m_1, m_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Взаємна кореляційна функція впливу і відгуку ЛДС.** Знову розглянемо ЛДС (див. рис. 4.1). Використовуючи зображення центрованого відгуку системи  $\dot{\eta}(n)$ , представленого правою частиною співвідношення (4.1), можемо записати для взаємної кореляційної функції вхідного процесу  $\xi(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  і процесу на виході ЛДС  $\eta(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  у такому вигляді:

$$R_{\xi\eta}(n_1, n_2) = M[\dot{\xi}(n_1)\dot{\eta}(n_2)] = M\left[\dot{\xi}(n_1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m)\dot{\xi}(m)\right].$$

Оскільки перший співмножник в квадратних дужках у правій частині не залежить від індексу підсумовування, то його можна внести під знак суми і записати

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(n_1, n_2) &= M\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m)\dot{\xi}(n_1)\dot{\xi}(m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m)M[\dot{\xi}(n_1)\dot{\xi}(m)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_2, m)R_{\xi}(n_1, m), \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Література:** [1, стор. 279 - 286].

### Завдання до лабораторної роботи

1. Виконати стохастичний аналіз нерекурсивної ЛДС при дії на вході дискретного випадкового сигналу (оцінити математичне сподівання, дисперсію, коефіцієнт кореляції та побудувати гістограму за реалізацією вихідного процесу).

2. Виконати стохастичний аналіз рекурсивної ЛДС при дії на вході дискретного випадкового сигналу (оцінити математичне сподівання, дисперсію, коефіцієнт кореляції та побудувати гістограму за реалізацією вихідного процесу).

### Порядок виконання роботи

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD та виконати наступні пункти роботи.

1. Здійснити стохастичний аналіз нерекурсивної ЛДС при дії процесу ковзного середнього. Для цього

1.1. Отриману в п. 2 лабораторної роботи 3 реалізацію процесу ковзного середнього пропустити через нерекурсивну ЛДС (коефіцієнти системи задаються викладачем) за допомогою функції *filter* і отримати реалізацію на виході.

1.2. Зобразити та порівняти реалізації процесів на вході і виході ЛДС.

1.3. За допомогою функцій *mean*, *std* і *xcorr* розрахувати оцінки математичного сподівання, дисперсії і коефіцієнта кореляції вихідного процесу.

1.4. За допомогою функції *hist* побудувати гістограму реалізації процесу на виході.

2. Здійснити стохастичний аналіз рекурсивної ЛДС при дії процесу ковзного середнього. Для цього дослідження, аналогічні пп. 1.1 – 1.4, виконати для рекурсивної системи.

3. Здійснити стохастичний аналіз нерекурсивної ЛДС при дії процесу авторегресії-ковзного середнього. Для цього слід скористатись реалізацією, сформованою в п. 5 лабораторної роботи 3 і далі виконати дослідження, аналогічні пп. 1.1 – 1.4, але для процесу авто регресії-ковзного середнього.

4. Здійснити стохастичний аналіз рекурсивної ЛДС при дії процесу авторегресії-ковзного середнього. Для цього слід скористатись реалізацією, сформованою в п. 5 лабораторної роботи 3 і далі виконати дослідження, аналогічні п. 2, але для процесу авто регресії-ковзного середнього.

5. Проаналізувати отримані результати за пп. 1 – 4 і зробити висновки.

### **Контрольні питання**

1. Що таке стохастичний аналіз ЛДС в рамках кореляційної теорії ?

2. Запишіть формально зв'язок між вхідним і вихідним випадковими процесами для ЛДС у часовій області.

3. Наведіть співвідношення між математичними сподіваннями процесів на вході і виході ЛДС.

4. Що таке центрований випадковий процес ?

5. Запишіть співвідношення для визначення кореляційної функції випадкового процесу на виході ЛДС.

6. Як знайти дисперсію випадкового процесу на виході ЛДС коли відома його кореляційна функція ?

7. Наведіть означення взаємної кореляційної функції ?

8. Чи можна визначити взаємну кореляційну функцію впливу і відгуку ЛДС коли відома автокореляційна функція випадкового процесу на вході ?

### **Лабораторна робота 5**

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ШУМІВ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА**

**Мета роботи:** закріпити на практиці основні поняття, пов'язані з математичними моделями та стохастичними властивостями шумів



квантування дискретних сигналів, зокрема, на виході аналого-цифрового перетворювача..

### Короткі теоретичні відомості

Реальні «первинні» сигнали як правило належать до класу аналогових, тобто неперервні як у часі, так і за своїми значеннями. В той же час цифрові системи обробки сигналів належать до класу дискретних систем. Тому для обробки «первинних» сигналів в цифрових система вони, по-перше, повинні бути дискретизовані у часі. Окрім того, зазначимо, що для зображення відліків дискретних сигналів, наприклад у двійковій системі числення, потрібно мати у загальному випадку необмежену кількість розрядів. В цифрових же системах обробки сигналів застосовуються елементи пам'яті (регістри, комірки пам'яті) та операційні пристрої (суматори, перемножувачі), які мають обмежену розрядність. Тому, по-друге, відліки дискретних сигналів підлягають ще і *квантуванню*, тобто наближеному їх зображенню з використанням обмеженої кількості розрядів. При цьому виникають похибки, які називають *похибками квантування*.

По суті квантування, це нелінійне безінерційне перетворення сигналу, тобто

$$\hat{x}(n) = F[x(n)], \quad (5.1)$$

де  $x(n)$  -  $n$ -й відлік дискретного сигналу, який представлений  $k$ -розрядним числом;  $\hat{x}(n)$  -  $n$ -й відлік квантованого сигналу, який представлений  $b$ -розрядним числом ( $b < k$ );  $F(\cdot)$  - нелінійна функціональна залежність.

В формулі (5.1)  $x(n)$  - дискретний сигнал а  $\hat{x}(n)$  - цифровий сигнал. Похибка, яка виникає при квантуванні, тобто при переході від дискретного до цифрового сигналу

$$\varepsilon(n) = \hat{x}(n) - x(n). \quad (5.2)$$

Формулу (5.2) можна переписати так:  $x(n) = \hat{x}(n) + \varepsilon(n)$  і тоді похибку квантування  $\varepsilon(n)$  можна розглядати як адитивний дискретний випадковий процес, який називають *шумом квантування*. Такий підхід дає можливість розглядати лінійну модель процесу квантування (рис. 5.1) [1].

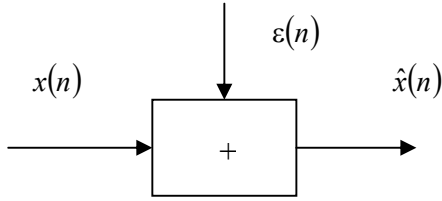


Рис. 5.1. Лінійна модель процесу квантування

Відносно шуму квантування  $\varepsilon(n)$  робляться наступні припущення:

1.  $\varepsilon(n)$  представляє собою стаціонарну ергодичну дискретну випадкову послідовність;
2.  $\varepsilon(n)$  описується неперервним рівномірним розподілом на інтервалі, довжина якого дорівнює кроку квантування  $Q = 2^{-b}$  (коли використовується двійкова система числення);
3. Послідовність  $\varepsilon(n)$  належить до класу процесів типу дискретного білого шуму у широкому розумінні;
4. Послідовність  $\varepsilon(n)$  не корельовано з послідовністю  $x(n)$ .

Оскільки дискретні відліки сигналів зображуються числами (у певній системі числення, як правило двійковій), то квантування сигналів по суті зводиться до наближеного зображення чисел обмеженою кількістю розрядів  $b$ .

Квантування чисел виконується двома способами: *округлювання чисел* і *зрізання чисел*. У першому випадку число  $x(n)$  замінюється найближчим до нього  $b$ -розрядним числом  $\hat{x}(n)$ . У цьому випадку шум квантування  $\varepsilon(n)$  має рівномірний розподіл на інтервалі  $\left[-\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right]$  з нульовим математичним сподіванням  $a = M\varepsilon(n) = 0$  і дисперсією

$$\sigma^2 = M[\varepsilon(n) - a]^2 = M\varepsilon^2(n) = \frac{Q^2}{12},$$

де  $M$  - оператор математичного сподівання.

При квантуванні методом зрізування у  $k$ -розрядного числа  $x(n)$  відкидаються  $k - b$  ( $b < k$ ) молодших розрядів і у результаті

отримують квантоване  $b$ -розрядне число  $\hat{x}(n)$ . За такого методу шум квантування  $\varepsilon(n)$  теж має рівномірний розподіл, але на інтервалі  $[-Q, 0]$ . Тоді для математичного сподівання шуму  $\varepsilon(n)$  маємо  $a = -\frac{Q}{2}$ , а дисперсія

$$\sigma^2 = M[\varepsilon(n) - a]^2 = M\left[\varepsilon(n) + \frac{Q}{2}\right]^2 = \frac{Q^2}{12}.$$

Дискретизація та квантування сигналів виконується в аналого-цифрових перетворювачах (АЦП). На вході АЦП діє аналоговий сигнал  $x(t)$ . На виході маємо відгук  $\hat{x}(n)$ , тобто дискретний і квантований сигнал. Отже в АЦП виконується по суті дві операції, дискретизація і квантування.

**Література:** [1, стор. 296 - 306].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. Дослідити статистичні властивості шуму квантування (побудувати гістограму, знайти оцінки середнього, дисперсії, коефіцієнта кореляції) для АЦП, у якому квантування чисел здійснюється способом округлювання.
2. Дослідити статистичні властивості шуму квантування (побудувати гістограму, знайти оцінки середнього, дисперсії, коефіцієнта кореляції) для АЦП, у якому квантування чисел здійснюється способом зрізування.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD та виконати наступні пункти роботи.

1. Отримати реалізацію випадкового дискретного процесу шляхом генерації рівномірно розподілених чисел за допомогою функції *rand*. Зобразити реалізацію графічно.
2. Обчислити оцінки математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта кореляції та побудувати гістограму отриманої в п. 1 реалізації.
3. За допомогою функції *quantize* на основі отриманої в п. 1 реалізації дискретного випадкового процесу побудувати реалізацію

квантованої послідовності з використанням методу округлювання чисел. Зобразити отриману квантовану послідовність графічно.

4. На основі побудованої в п. 3 реалізації квантованої послідовності з використанням методу округлювання чисел знайти оцінки математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта кореляції та побудувати гістограму. Отримані оцінки порівняти з оцінками в п. 2.

5. Порівняти дискретну послідовність, отриману в п. 1, з квантованою послідовністю із п. 3 на основі наступного критерію

$$\|\hat{x} - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^K |\hat{x}_i - x_i|^2},$$

де  $K$  - кількість елементів (відліків) у послідовності.

6. За допомогою функції *quantize* на основі отриманої в п. 1 реалізації дискретного випадкового процесу побудувати реалізацію квантованої послідовності з використанням методу зрізування чисел. Зобразити отриману квантовану послідовність графічно та виконати дослідження, аналогічні пп. 4, 5.

7. Проаналізувати отримані результати за пп. 1 – 6 і зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Чим визвана необхідність виконувати квантування відліків дискретного сигналу ?

2. Що є причиною виникнення шумів квантування ?

3. Що таке крок квантування і як він визначається ?

4. Дайте означення нелінійної моделі процесу квантування.

5. Сформулюйте поняття лінійної моделі процесу квантування.

6. У чому полягає спосіб округлювання при квантуванні відліків дискретного сигналу ?

7. У чому полягає спосіб зрізування при квантуванні відліків дискретного сигналу ?

8. Яким розподілом описуються шуми квантування при використанні способу округлювання ?

9. Яким розподілом описуються шуми квантування при використанні способу зрізування ?

10. Від чого залежить величини дисперсія шуму квантування ?

11. Запишіть вирази для математичних сподівань шумів квантування при використанні способу округлювання і способу зрізування чисел.

## Лабораторна робота 6 ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФІЛЬТРІВ НИЖНІХ ЧАСТОТ

**Мета роботи:** засвоєння основних методів розрахунку цифрових фільтрів нижніх частот та експериментальне дослідження їх властивостей.

### Короткі теоретичні відомості

У цій лабораторній роботі під фільтром нижніх частот (ФНЧ) будемо розуміти частотно-вибіркову ЛДС, яка пропускає гармонічні коливання, частоти яких лежать в межах від 0 до  $\omega_{\text{сд}}$  (смуга пропускання), і затримує коливання з частотами  $\omega > \omega_{\text{сд}}$  (смуга затримки). Частоту  $\omega_{\text{сд}}$  називають частотою зрізу. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)  $|\dot{H}(\omega)|$  ФНЧ показана на рис. 6.1.

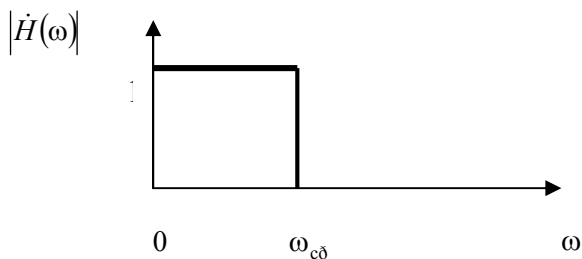


Рис. 6.1. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФНЧ

Така АЧХ є ідеальною у тому розумінні, що вона не може бути реалізована ніякими реальними системами ЦОС (як апаратним, так і програмним способом) і в той же час, чим ближче реальна АЧХ реального цифрового фільтра до АЧХ на рис. 6.1 (у певному розумінні, наприклад у середньоквадратичному сенсі), тим краще.

Реальна АЧХ має наступні відхилення від ідеальної:

- в смузі пропускання від 1 як у бік збільшення, так і у бік зменшення;
- в смузі затримки від 0 в сторону збільшення;
- від вертикальної лінії в точці  $\omega_{\text{сд}}$  (при цьому з'являється пе-

рехідна смуга від частоти зрізу  $\omega_{\zeta\delta}$  до граничної частоти  $\omega_{\text{а}\delta}$ ).

Чим менші ці відхилення, тим краще. Реальна АЧХ фільтра нижніх часто показана на рис. 6.2. На цьому зображенні  $\delta_1$  - максимальне допустиме відхилення АЧХ в смузі пропускання, тобто при  $\omega \in [0, \omega_{\zeta\delta}]$   $1 - \delta_1 \leq |\dot{H}(\omega)| \leq 1 + \delta_1$ . В перехідній смузі ( $\omega_{\zeta\delta}, \omega_{\text{а}\delta}$ ) ніякі обмеження на АЧХ фільтра не накладаються за винятком того, що ширина смуги  $\omega_{\text{а}\delta} - \omega_{\zeta\delta}$  повинна бути якомога меншою. В смузі затримки при  $\omega \geq \omega_{\text{а}\delta}$   $0 \leq |\dot{H}(\omega)| \leq \delta_2$ .

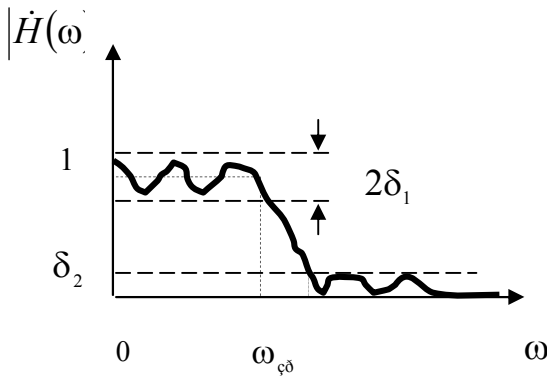


Рис. 6.2. Реальна амплітудно-частотна характеристика ФНЧ

**Література:** [1, стор. 325 – 344, 3 – 403, 499 - 524].

### Завдання до лабораторної роботи

1. Синтезувати методом вікон та дослідити властивості цифрового СІХ-фільтра нижніх частот.
2. Синтезувати методом білінійного перетворення та дослідити властивості цифрового НІХ-фільтра нижніх частот.

### Порядок виконання роботи

Для виконання роботи необхідно запуснути програмне середовище MATCAD, звернутись до програми *SPTool* (шляхом виклику *sptool*) та виконати наступні пункти роботи.

1. Задати специфікацію вимог до цифрового фільтра нижніх частот (частота дискретизації, частота зрізу, ширина перехідної

смуги, відхилення в смузі пропускання, відхилення в смузі затримки).

2. Синтезувати методом вікон (прямокутного, Хеммінга, Блекмена, Кайзера) цифровий СІХ-фільтр нижніх частот. Розрахувати та зобразити коефіцієнти фільтра, імпульсну характеристику, АЧХ і ФЧХ фільтра.

3. Імпортувати *From Workspace* вхідні сигнали у вигляді суми двох гармонічних коливань у трьох варіантах: а) з частотами, що лежать в межах смуги пропускання; б) з частотами, що лежать в межах смуги затримки; в) з частотами, одна із яких лежить в смузі пропускання, а інша в смузі затримки.

4. Виконати моделювання процесу фільтрації створених сигналів і зобразити вхідні та отримані на виході реакції фільтра у часі. Розрахувати та візуалізувати спектри вхідного та вихідного сигналів у вікні *SPTool:startup.spt*.

5. Синтезувати методом білінійного  $z$ -перетворення цифровий НІХ-фільтр нижніх частот. Розрахувати та зобразити коефіцієнти фільтра, імпульсну характеристику, АЧХ і ФЧХ фільтра. Для синтезованого НІХ-фільтра виконати дослідження, аналогічні пп. 3, 4.

6. Проаналізувати отримані результати за пп. 2 – 5 і зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Наведіть означення цифрового фільтра у вузькому розумінні.
2. Який фільтр називається фільтром нижніх частот ?
3. Що таке частота зрізу для фільтра нижніх частот ?
4. Зобразіть ідеальну АЧХ фільтра нижніх частот.
5. Зобразіть реальну АЧХ фільтра нижніх частот.
6. Що таке гранична частота для фільтра нижніх частот ?
7. Які смуги частот є характерними для реальної АЧХ фільтра нижніх частот ?
8. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ фільтра нижніх частот в смузі пропускання ?
9. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ фільтра нижніх частот в смузі затримки ?
10. У чому полягає суть методу синтезу НІХ-фільтрів методом білінійного  $z$ -перетворення ?

11. Чим відрізняються СІХ-фільтри і НІХ-фільтри нижніх частот ?

### Лабораторна робота 7 ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФІЛЬТРІВ ВЕРХНІХ ЧАСТОТ

**Мета роботи:** засвоєння основних методів розрахунку цифрових фільтрів верхніх частот та експериментальне дослідження їх властивостей.

#### Короткі теоретичні відомості

Фільтром верхніх частот (ФВЧ) називають частотно-вибіркову ЛДС, яка затримує гармонічні коливання, частоти яких лежать в межах від 0 до  $\omega_{\text{сд}}$  (смуга затримки), і пропускає коливання з частотами  $\omega > \omega_{\text{сд}}$  (смуга пропускання). Частоту  $\omega_{\text{сд}}$  називають частотою зрізу. Можна сказати, що ФВЧ за своїми частотними властивостями протилежний ФНЧ. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)  $|\dot{H}(\omega)|$  ФВЧ показана на рис. 7.1.

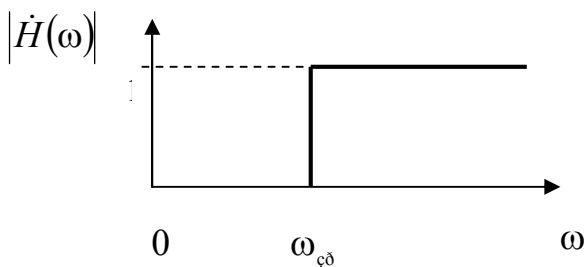


Рис. 7.1. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФВЧ

Такого виду АЧХ, як і для ФНЧ (див. рис. 6.1), є ідеальною і не може бути реалізована ніякими реальними системами ЦОС. Про неї можна зробити тіж зауваження, що і для ідеальної АЧХ ФНЧ (див. лаб. роботу 6).

Реальна АЧХ для ФВЧ зображена на рис. 7.2.

На рис. 7.2 смуга частот від граничної частоти  $\omega_{\text{зд}}$  до частоти зрізу  $\omega_{\text{сд}}$  називається перехідною смугою. В цій смузі ніякі вимоги



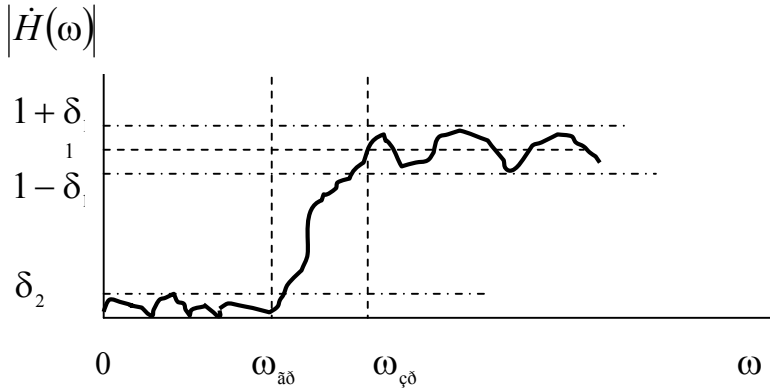


Рис. 7.2. Реальна амплітудно-частотна характеристика ФВЧ

до АЧХ фільтра не задаються.  $\delta_1$  - максимально допустиме відхилення АЧХ від 1 в смузі пропускання.  $\delta_2$  - максимально допустиме відхилення АЧХ від 0 в смузі затримки.

**Література:** [1, стор. 325 – 344, 3 – 403, 499 - 524].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. Синтезувати методом вікон та дослідити властивості цифрового СІХ-фільтра верхніх частот.
2. Синтезувати методом білінійного  $z$ -перетворення та дослідити властивості цифрового НІХ-фільтра верхніх частот.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD, звернутись до програми *SPTool* (шляхом виклику *sptool*) та виконати наступні пункти роботи.

1. Задати специфікацію вимог до цифрового фільтра верхніх частот (частота дискретизації, частота зрізу, ширина перехідної смуги, відхилення в смузі пропускання, відхилення в смузі затримки).
2. Синтезувати методом вікон (прямокутного, Хеммінга, Блекмена, Кайзера) цифровий СІХ-фільтр верхніх частот. Розрахувати

та зобразити коефіцієнти фільтра, імпульсну характеристику, АЧХ і ФЧХ фільтра.

3. Імпортувати *From Workspace* вхідні сигнали у вигляді суми двох гармонічних коливань у трьох варіантах: а) з частотами, що лежать в межах смуги пропускання; б) з частотами, що лежать в межах смуги затримки; в) з частотами, одна із яких лежить в смузі пропускання, а інша в смузі затримки.

4. Виконати моделювання процесу фільтрації створених сигналів і зобразити вхідні та отримані на виході реакції фільтра у часі. Розрахувати та візуалізувати спектри вхідного та вихідного сигналів у вікні *SPTool.startup.spt*.

5. Синтезувати методом білінійного  $z$ -перетворення цифровий НХХ-фільтр верхніх частот. Розрахувати та зобразити коефіцієнти фільтра, імпульсну характеристику, АЧХ і ФЧХ фільтра. Для синтезованого НХХ-фільтра виконати дослідження, аналогічні пп. 3, 4.

6. Проаналізувати отримані результати за пп. 2 – 5 і зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Сформулюйте основне призначення цифрового фільтра у вузькому розумінні.

2. Який фільтр називається фільтром верхніх частот ?

3. Що таке частота зрізу для фільтра верхніх частот ?

4. Зобразіть ідеальну АЧХ фільтра верхніх частот.

5. Зобразіть реальну АЧХ фільтра верхніх частот.

6. Що таке гранична частота для фільтра верхніх частот ?

7. Які смуги частот є характерними для реальної АЧХ фільтра верхніх частот ?

8. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ фільтра верхніх частот в смузі пропускання ?

9. Які обмеження накладаються на реальну АЧХ фільтра верхніх частот в смузі затримки ?

10. У чому полягає суть методу синтезу СІХ-фільтрів методом вікон ?

11. Як перейти від ФНЧ до ФВЧ шляхом реактансного перетворення частоти ?

## Лабораторна робота 8 ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ГІЛЬБЕРТА

**Мета роботи:** засвоєння на практиці основних понять, пов'язаних з дискретним перетворенням Гільберта і його застосуванням для оцінювання обвідної та фази сигналу та експериментальне дослідження часових та частотних характеристик цифрового перетворювача Гільберта.

### Короткі теоретичні відомості

Пара дискретних перетворень Гільберта:

$$\tilde{x}(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m}, \quad \text{êîëè} \quad m \neq n, \quad (8.1)$$

$$x(n) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n-m) \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m}, \quad \text{êîëè} \quad m \neq n, \quad (8.2)$$

де  $\tilde{x}(n)$  і  $x(n)$  - спряжені за Гільбертом дискретні сигнали, які знаходяться в квадратурі, тобто їх фази відрізняються на  $\frac{\pi}{2}$ .

Співвідношення (8.1) носить назву прямого перетворення Гільберта, а співвідношення (8.2) – оберненого перетворення Гільберта. Перетворення Гільберта дає можливість ввести поняття обвідної сигналу  $x(n)$ :

$$X(n) = \sqrt{x^2(n) + \tilde{x}^2(n)}$$

і повної фази сигналу  $x(n)$ :

$$\psi(n) = \text{arctg} \frac{\tilde{x}(n)}{x(n)},$$

а також поняття аналітичного сигналу

$$\dot{z}_x(n) = x(n) + j\tilde{x}(n) = X(n)e^{j\psi(n)}.$$

Для отримання на практиці спряжених за Гільбертом сигналів потрібно пропустити сигнал  $x(n)$  через фазообертач на  $\frac{\pi}{2}$ . Тоді

фаза кожної спектральної компоненти вхідного сигналу  $x(n)$  міняється на  $\frac{\pi}{2}$  і на виході отримуємо спряжений сигнал  $\tilde{x}(n)$ . Пристрій, який реалізує таке перетворення для цифрових сигналів називають цифровим перетворювачем Гільберта. Таким чином, цифровий перетворювач Гільберта можна реалізувати на основі цифрового фільтра, що здійснює зсув фази вхідного сигналу на  $\frac{\pi}{2}$ . В якості такого цифрового фільтра можуть бути використані СІХ фільтри з лінійною фазочастотною характеристикою типу 3 або 4.

**Література:** [1, стор. 431 - 446].

### **Завдання до лабораторної роботи**

1. Синтезувати перетворювачі Гільберта на основі цифрових смугових СІХ-фільтрів з лінійними ФЧХ 3 і 4 типів та дослідити їх часові та частотні характеристики.
2. Для заданого сигналу  $x(n)$  на основі цифрового перетворювача знайти спряжений сигнал  $\tilde{x}(n)$  та дослідити його обвідну і повну фазу.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD, звернутись до програми *SPTool* (шляхом виклику `sptool`) та виконати наступні пункти роботи.

1. Задати специфікацію вимог до цифрового смугового фільтра (частота дискретизації, частототи зрізу, ширина перехідних смуг, відхилення в смузі пропускання, відхилення в смугах затримки).
2. Синтезувати цифровий перетворювач Гільберта на основі смугових СІХ-фільтрів з лінійними ФЧХ типу 3 і 4.
3. Розрахувати та зобразити коефіцієнти фільтра, імпульсну характеристику, АЧХ і ФЧХ фільтрів, порівняти їх характеристики.
4. Для дискретного сигналу  $x(n) = \sin(\omega\Delta n) + \cos(2\omega\Delta n)$  на основі перетворювача Гільберта (смуговий СІХ-фільтр з лінійними ФЧХ типу 3) обчислити його спряжений сигнал  $\tilde{x}(n)$ , обвідну і повну фазу.

5. Для дискретного сигналу  $x(n) = \sin(\omega\Delta n) + \cos(2\omega\Delta n)$  на основі перетворювача Гільберта (смуговий СІХ-фільтр з лінійними ФЧХ типу 4) обчислити його спряжений сигнал  $\tilde{x}(n)$ , обвідну і повну фазу.

6. Порівняти результати розрахунків за пп. 4 і 5 та зробити висновки.

### Контрольні питання

1. Запишіть вираз для прямого дискретного перетворення Гільберта сигналу  $x(n)$ .

2. Запишіть вираз для оберненого дискретного перетворення Гільберта спряженого сигналу  $\tilde{x}(n)$ .

3. Як знайти для сигналу  $x(n)$  спряжений сигнал  $\tilde{x}(n)$ ?

4. Як відрізняються між собою фази спряжених сигналів  $x(n)$ ,  $x(n)$  і  $\tilde{x}(n)$ ?

5. Сформулюйте поняття аналітичного сигналу.

6. Дайте означення обвідної сигналу.

7. Запишіть вираз для знаходження повної фази дискретного сигналу  $x(n)$  коли відомий спряжений йому сигнал  $\tilde{x}(n)$ .

8. Дайте означення смугового фільтра.

9. Як на практиці реалізується цифровий перетворювач Гільберта?

10. Що собою представляє цифровий смуговий СІХ-фільтр з лінійною ФЧХ 3 типу?

11. Що собою представляє цифровий смуговий СІХ-фільтр з лінійною ФЧХ 4 типу?

12. Що собою представляє цифровий смуговий СІХ-фільтр з лінійною ФЧХ 3 типу?

### Лабораторна робота 9

## КАЛМАНІВСЬКЕ ОЦІНЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

**Мета роботи:** Ознайомитись на практиці з методами рекурсивної адаптивної обробки дискретних сигналів на основі дослідження калманівської фільтрації дискретних випадкових процесів.

### Короткі теоретичні відомості

Значна частина задач в системах ЦОС пов'язана з обробкою «корисних» сигналів, які містять в собі деяку інформацію, на фоні дії «спотворюючих» завад. В процесі обробки характер завад змінюється, тому оптимальним є підхід, коли система обробки адаптується до таких змін.

Калманівська фільтрація реалізує обробку випадкових сигналів на фоні завад з рекурентною процедурою адаптації. при цьому використовується так звана авторегресійна модель випадкового сигналу

$$x(n) = ax(n-1) + w(n-1),$$

де  $w(n)$  - процес типу дискретного білого шуму з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\sigma_w^2$ ;  $a$  - деякий коефіцієнт.

В процесі проходження по каналах зв'язку сигнал  $x(n)$  може змінювати свій рівень, що враховується множенням на коефіцієнт  $C$ , Окрім того впливають зовнішні завади, що враховується адитивною дією дискретного білого шуму  $v(n)$  з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\sigma_v^2$ . Тоді модель сигналу, що діє на калманівський фільтр

$$y(n) = cx(n) + v(n).$$

На виході фільтра отримуємо рекурентну оцінку  $\tilde{x}(n)$ , яка максимально близька за критерієм методу найменших квадратів (МНК) до сигналу  $x(n)$ . Рекурсивна формула оцінки першого порядку має вигляд [1]:

$$\tilde{x}(n) = b(n)\tilde{x}(n-1) + k(n) \cdot y(n).$$

Середньоквадратична похибка

$$\varepsilon(n) = M[\tilde{x}(n) - x(n)]^2 = M[b(n)\tilde{x}(n-1) + k(n) \cdot y(n) - x(n)]^2,$$

де  $M$  - оператор математичного сподівання. Згідно з МНК похибка  $\varepsilon(n)$  мінімізується шляхом «вибору» відповідних значень коефіцієнтів  $b(n)$  і  $k(n)$ . Розв'язок такої задачі з урахуванням стохастичних властивостей похибки  $\tilde{x}(n) - x(n)$  та процесів  $v(n)$  і  $w(n)$  дає наступний алгоритм рекурсивного адаптивного оцінювання першого порядку [1]:

$$\tilde{x}(n) = a\tilde{x}(n-1) + k(n)[y(n) - ac\tilde{x}(n-1)],$$

який називають скалярним фільтром Калмана.

Коефіцієнт  $k(n)$  змінюється у часі (дискретному) і його значення визначаються параметрами завод і поточного значення середньоквадратичної похибки  $\varepsilon(n)$ , тобто

$$k(n) = \frac{c[a^2\varepsilon(n-1) + \sigma_w^2]}{\sigma_v^2 + c^2\sigma_w^2 + c^2a^2\varepsilon(n-1)},$$

де, в свою чергу, середньоквадратична похибка

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{c}\sigma_v^2k(n).$$

**Література:** [1, стор. 575 - 580].

### **Завдання до лабораторної роботи**

Синтезувати та дослідити скалярний фільтр Калмана, коли на сигнал накладається адитивний шум з заданою дисперсією.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запустити програмне середовище MATCAD та виконати наступні пункти роботи.

1. Синтезувати скалярний фільтр Калмана для випадку, коли адитивний шум  $v(n)$  в моделі вхідного сигналу є стаціонарний білий шум з дисперсією  $\sigma_v^2 = 0,5$ , отримати значення оцінки  $\tilde{x}(n)$ , похибки оцінювання  $\varepsilon(n)$  та коефіцієнта  $k(n)$ .

2. Синтезувати скалярний фільтр Калмана для випадку, коли адитивний шум  $v(n)$  в моделі вхідного сигналу є випадковий процес з дисперсією  $\sigma_v^2(n) = 0,5$  коли  $n = 0, 2, 4, \dots$  і  $\sigma_v^2(n) = 1,0$  коли  $n = 1, 3, 5, \dots$ , отримати значення оцінки  $\tilde{x}(n)$ , похибки оцінювання  $\varepsilon(n)$  та коефіцієнта  $k(n)$ .

3. Порівняти отримані результати та зробити висновки.

### **Контрольні питання**

1. У чому полягає процес адаптивної обробки сигналів ?
2. До чого зводиться рекурентний алгоритм адаптивної обробки сигналів ?

3. Зобразіть структурну схему пристрою генерування авто регресійного випадкового процесу першого порядку.
4. На основі якої ЛДС виконується генерація авто регресійного процесу ?
5. Запишіть математичну модель впливу адитивного шуму на корисний сигнал при проходженні його по каналу зв'язку.
6. Запишіть рекурсивну формулу оцінки першого порядку випадкового сигналу.
7. Наведіть вираз для середньоквадратичної похибки оцінки.
8. Опишіть алгоритм рекурсивного адаптивного оцінювання першого.
9. Зобразіть структурну схему скалярного фільтра Калмана.
10. Як залежить коефіцієнт «довіри»  $k(n)$  фільтра Калмана від дисперсії завади ?
11. Наведіть формулу, що пов'язує значення середньоквадратичної похибки зі значенням коефіцієнта «довіри».

### **Лабораторна робота 10**

## **ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИСКРЕТНОГО ФІЛЬТРА ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

**Мета роботи:** ознайомитись та закріпити на практиці з описом нелінійних дискретних систем на основі функціональних рядів та поліномів Вольтерра та дослідити властивості нелінійної дискретної системи другого порядку.

### **Короткі теоретичні відомості**

В сучасних системах ЦОС все більшого застосування знаходить нелінійна обробка сигналів (детектування, нелінійна фільтрація, компенсація, перетворення частоти, генерування сигналів тощо). Для опису нелінійних систем широко застосовують так звані функціональні ряди та поліноми Вольтерра.

Співвідношення вхід-вихід нелінійної дискретної системи (НДС) у часовій області описується дискретним функціональним рядом Вольтерра

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k [x(n)] =$$



$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) \prod_{j=1}^k x(n - m_j), \quad (10.1)$$

де  $n$  - нормований дискретний час;  $x(n)$  - значення вхідного дискретного сигналу у момент часу  $n$ ;  $y(n)$  - значення вихідного дискретного сигналу у момент часу  $n$ ; багатовимірна сума

$$H_k[x(n)] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) \prod_{j=1}^k x(n - m_j) \quad (10.2)$$

носить назву *однорідного функціоналу  $k$ -го порядку*. Дискретну функцію багатьох змінних  $h_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$  називають *ядром Вольтерра  $k$ -го порядку*.

При  $k=0$  отримуємо функціонал нульового порядку  $H_0[x(n)] \equiv h_0$ , де  $h_0$  - деяка стала. При  $k=1$  отримуємо функціонал першого порядку  $H_1[x(n)] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} h_1(m)x(n-m)$ , який є дискретною лінійною згортою і представляє собою лінійну підсистему в (10.1) з імпульсною характеристикою  $h_1(m)$ . Продовжуючи аналогію, функціонал (10.2) при  $k > 1$  називають *нелінійною згортою  $k$ -го порядку*, який представляє собою нелінійну підсистему  $k$ -го порядку з ядром  $h_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , що називають багатовимірною імпульсною характеристикою  $k$ -го порядку.

Якщо ядро Вольтерра симетризувати за формулою

$$\tilde{h}_k(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{1}{k!} \sum h_k(m_1, m_2, \dots, m_k),$$

де сума розповсюджується на всі можливі перестановки аргументів  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , то отримаємо *регулярний однорідний функціонал  $k$ -го порядку*

$$H_k[x(n)] = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} \tilde{h}_k(m_1, m_2, \dots, m_k) \prod_{j=1}^k x(n - m_j).$$

Слід зазначити, що ряд Вольтерра (10.1) збігається як правила за малих амплітуд вхідного сигналу  $x(n)$ , що відповідає *слабо нелінійному* режиму роботи дискретної системи. В режимі *суттєвої нелінійності* (коли вхідний сигнал  $x(n)$  має високий рівень) функціональний ряд розходиться і співвідношення вхі-вихід нелінійної си-

стеми може бути описане функціональним поліномом Вольєрра порядку  $N$ , тобто

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^N H_k [x(n)] = \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} h_k(m_1, m_2, \dots, m_k) \prod_{j=1}^k x(n - m_j). \end{aligned}$$

**Література:** [1, стор. 643 - 676].

### **Завдання до лабораторної роботи**

Побудувати математичну модель нелінійної дискретної системи другого порядку на основі полінома Вольєрра 2-го порядку і дослідити її властивості.

### **Порядок виконання роботи**

Для виконання роботи необхідно запуснути програмне середовище MATCAD та виконати наступні пункти роботи.

1. Отримати множину реалізацій довжини  $N$  дискретного випадкового стаціонарного вхідного сигналу нелінійної системи (множину випробувальних сигналів).

2. Отримати множину реалізацій довжини  $N$  відповідного дискретного випадкового стаціонарного вихідного сигналу.

3. За критерієм найкращого середньоквадратичного наближення із застосуванням ортогонального методу Ейкхофа розрахувати параметри полінома Вольєрра 2-го порядку.

4. Пропустити через синтезовану нелінійну систему другого порядку реалізацію стаціонарного випадкового процесу, зобразити реалізацію вихідного процесу та графік похибки.

5. Проаналізувати результати роботи і зробити висновки.

### **Контрольні питання**

1. Як описується співвідношення вхід-вихід НДС у часовій області на основі функціонального ряду Вольєрра.

2. Що таке однорідний функціонал  $k$ -го порядку ?

3. Що собою представляє ядро Вольєрра нульового порядку ?

4. Що собою представляє ядро Вольєрра першого порядку ?

5. Розкрийте суть другої складової функціонального ряду Вольєрра.

6. Що таке багатовимірна імпульсна характеристика  $k$ -го порядку ?
7. Запишіть вираз для нелінійної згортки  $k$ -го порядку.
8. Що таке симетризоване ядро Вольтерра ?
9. Запишіть вираз для полінома Вольтерра  $N$ -го порядку.
10. Що таке слабо нелінійний режим роботи нелінійної дискретної системи ?
11. Як описується у часовій області вхід-вихід нелінійної системи в режимі суттєвої не лінійності ?

### **Список літератури**

1. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций /Авторы: А. И. Солонина, В. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева/ Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.
2. Айфичер, Эммануил С., Джервис, Барри У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
4. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 328 с.

## ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>3</b>
Лабораторна робота 1. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК 1-го та 2-го ПОРЯДКІВ ЛДС У ЧАСІ.....</b>	<b>4</b>
Лабораторна робота 2. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАНОК 1-го та 2-го ПОРЯДКІВ ЛДС У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ.....</b>	<b>9</b>
Лабораторна робота 3. <b>ГЕНЕРУВАННЯ РЕАЛІЗАЦІЙ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЛДС .....</b>	<b>17</b>
Лабораторна робота 4. <b>АНАЛІЗ ПРОХОДЖЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛДС.....</b>	<b>20</b>
Лабораторна робота 5. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ШУМІВ АНАЛОГОЦИФРОВОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА .....</b>	<b>24</b>
Лабораторна робота 6. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФІЛЬТРІВ НИЖНІХ ЧАСТОТ .....</b>	<b>29</b>
Лабораторна робота 7. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФІЛЬТРІВ ВЕРХНІХ ЧАСТОТ .....</b>	<b>32</b>
Лабораторна робота 8. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ГЛІБЕРТА .....</b>	<b>35</b>
Лабораторна робота 9. <b>КАЛМАНІВСЬКЕ ОЦІНЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ .....</b>	<b>37</b>
Лабораторна робота 10. <b>ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИСКРЕТНОГО ФІЛЬТРА ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....</b>	<b>40</b>
<b>Список літератури.....</b>	<b>43</b>

**Навчальне видання**

**ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ**

Лабораторний практикум  
для студентів напрямів підготовки  
6.050801 «Мікро- та наноелектроніка»,  
6.050802 «Електронні пристрої та системи»

**Укладачі: БОЙКО Іван Федорович  
ІВАНИЦЬКИЙ Євген Сергійович**