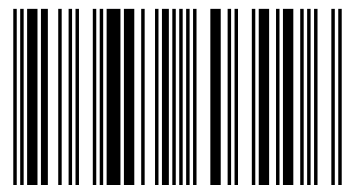


Дискретные ортогональные базисы Виленкина-Крестенсона функций

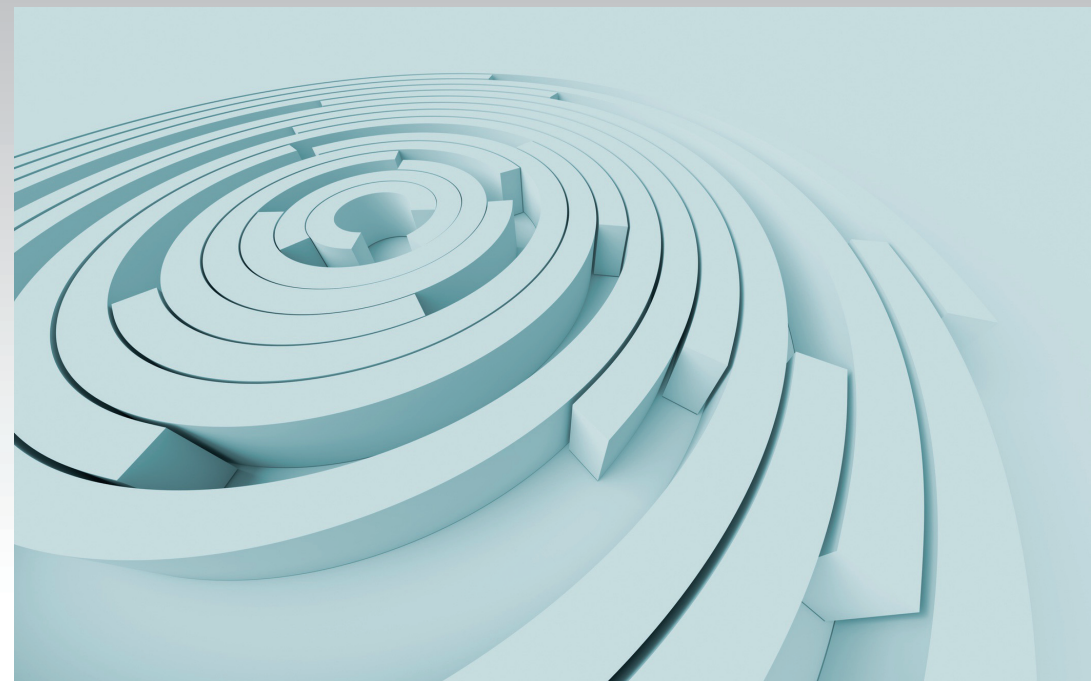
В монографии развиваются основы прикладной теории дискретных систем Виленкина — Крестенсона функций (ВКФ), включая системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) и системы функций Уолша. Особенность монографии состоит в том, что, во-первых, в ней получены аналитические оценки числа симметричных систем ВКФ в бесконечном интервале изменения параметров (основания системы счисления и степени основания), определяющих порядок матриц ВКФ, тогда как в известных источниках эти оценки даны лишь для степени, равной двум. Во-вторых, введены так называемые индикаторные матрицы (ИМ), биективно связанные с матрицами систем ВКФ, причем порядок ИМ логарифмически зависит от порядка систем ВКФ. И, наконец, в-третьих, укажем на то, что в монографии комплексно-значные элементы матриц ВКФ замещены вещественными матрицами с целочисленными элементами, равными показателям степени фазовых множителей матриц ДЭФ или ВКФ. И, как следствие такого изоморфного замещения, значительно упрощается как процедура рандомизации матриц, так и технология построения структурных схем алгоритмов быстрого преобразования Фурье в соответствующих базисах.

Доктор техн. наук, профессор, Лауреат Гос. премии Украины в области науки и техники (2000), Засл. деятель науки и техники Украины (2011), профессор кафедры электроники Нац. авиац. ун-та, г. Киев. Научные интересы: цифровая обработка сигналов, помехоустойчивое кодирование, криптография. Порядка 350 публ., в числе которых 8 монографий, 5 уч. пособий



978-3-659-60300-6

Дискретные базисы ВКФ



Анатолий Белецкий

Дискретные ортогональные базисы Виленкина-Крестенсона функций

Основы теории

Белецкий


Palmarium
academic publishing

Анатолий Белецкий

**Дискретные ортогональные базисы Виленкина-Крестенсона
функций**

Анатолий Белецкий

**Дискретные ортогональные базисы
Виленкина-Крестенсона функций**

Основы теории

Palmarium Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

Palmarium Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@palmarium-publishing.ru

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-60300-6

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2015 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Системы дискретных экспоненциальных функций	5
1.1. Общие сведения	5
1.2. Изоморфные преобразования систем ДЭФ	13
1.3. Синтез симметричных систем ДЭФ	15
1.4. Взаимосвязь систем ДЭФ	23
1.5. Факторизация симметрических матриц ДЭФ	26
1.6. Быстрое преобразование Фурье в базисах ДЭФ	42
1.6.1. Общие соотношения	42
1.6.2. Алгоритмы БПФ с основанием 2	44
1.6.3. Алгоритмы БПФ с основанием p	49
1.6.4. Составные основания алгоритмов БПФ	56
1.7. Алгоритмы БПФ в дочерних базисах ДЭФ	62
2. Системы функций Уолша	65
2.1. Общие сведения	65
2.2. Классические системы функций Уолша	66
2.2.1. Системы функций Уолша-Адамара	67
2.2.2. Системы функций Уолша-Пэли	69
2.2.3. Системы функций Уолша-Качмажа	72
2.3. Системы функций Уолша-Кули	74
2.4. Взаимосвязь частотных шкал процессоров ДПФ	75
2.5. Спектр сигналов в базисе функций Уолша-Кули	80
2.6. Синтез симметричных систем функций Уолша	83
2.6.1. Метод направленной перестановки базисных функций	84
2.6.2. Метод индикаторных матриц	91
2.6.3. Метод обобщенных преобразований Грея	101
2.7. Фундаментальные системы функций Уолша	103
2.8. Системы Уолша, порядок которых кратен четырем	109
2.9. Алгоритмы БПФ в базисе функций Уолша	111
3. Системы Виленкина-Крестенсона функций	117
3.1. Общие сведения	118
3.2. Оценка числа симметричных систем ВКФ	120
3.3. Системы ВКФ $V_{3,2}$	123

3.4. Системы ВКФ $V_{4,2}$	131
3.5. Системы ВКФ $V_{5,2}$	137
3.6. Системы ВКФ $V_{6,2}$	148
3.7. Системы ВКФ $V_{7,2}$	153
3.8. Системы ВКФ $V_{8,2}$	156
3.9. Структурно-логические алгоритмы БПФ в базисах ВКФ	157
3.9.1. Преобразования по модулю степени 2	158
3.9.2. Преобразования по модулю степени простых чисел	163
3.9.3. Преобразования по модулю составных чисел	167
Послесловие	169
Символы и обозначения	171
Список литературы	172
Предметный указатель	175
Приложения	177
Приложение 1. Индикаторные матрицы систем функций Уолша 16-го порядка	178
Приложение 2. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{3,2}$	194
Приложение 3. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{3,3}$	195
Приложение 4. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{4,2}$	202
Приложение 5. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{5,2}$	203
Приложение 6. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{6,2}$	205
Приложение 7. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{7,2}$	207
Приложение 8. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{8,2}$	210
Приложение 9. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{9,2}$	213
Приложение 10. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{10,2}$	218

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга является продолжением монографии [5] и составляет вторую часть трилогии, посвященной разработке теории и важнейшим приложениям обобщенных преобразований Грея [6-9].

В монографии развиваются основы прикладной теории дискретных систем Виленкина — Крестенсона функций (ВКФ) N -го порядка, $N = m^n$, где m и n — натуральные числа [24, 29, 30, 44]. Функцией Виленкина — Крестенсона дискретного аргумента t , $0 \leq t \leq m^n - 1$, называется функция, принимающая m комплексных значений при интервале задания $N = [0, m^n - 1]$ для любых натуральных чисел m (основания систем счисления) и n (порядка индикаторных матриц систем ВКФ, определение которых будет введено далее по тексту). Частным случаем систем ВКФ являются системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), когда $n = 1$, [22, 38, 40], и функций Уолша, когда $m = 2$, [3, 23, 27, 33, 40].

Обратим внимание на такие особенности результатов, полученных в монографии. Во-первых, отметим, что к настоящему времени в математической литературе приводятся сведения [1] лишь относительно аналитических оценок $L_{2,n}$ числа симметричных систем функций Уолша порядка $N = 2^n$. Что касается симметричных систем ВКФ порядка $N = m^n$, $m, n \geq 2$, то оценки $L_{m,n}$ получены для порядков N , в которых $n = 2$ (то есть оценки $L_{m,2}$) и не более того. В данной книге получены не только аналитические оценки $L_{m,n}$ во всем (бесконечном) диапазоне изменения параметров m и n (п. 3.2), но с помощью аппарата обобщенных кодов Грея (ОКГ), развитого в [5], даются ответы на вопросы относительно структуры матриц ВКФ и устанавливаются взаимосвязи систем, что совершенно не раскрыто в других источниках.

Во-вторых, матрицы, отвечающие симметричным системам ВКФ, однозначно определяются своими *индикаторными матрицами* \mathbf{J} [5-9, 12]. Индикаторные матрицы систем ВКФ представляют собой обратимые правосторонне симметрические матрицы n -го порядка, с элементами, принадлежащими множеству неотрицательных целых чисел $Z_m \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (*необходимые условия*), определитель которых является взаимно простым с основанием системы счисления m (*достаточные условия*). Порядок множества индикаторных матриц \mathbf{J} , удовлетворяющих сформулированным условиям, как раз и определяет мощность множества $L_{m,n}$ симметричных систем ВКФ.

И, наконец, в-третьих, укажем на то, что в монографии комплексно-значные элементы матриц ДЭФ и ВКФ замещены вещественными матрицами с целочисленными элементами Z_m , равными показателям степени фазовых множителей матриц. И, как следствие такого биективного (изоморфного) преобразования, значимо упростилась как процедура рандомизации матриц, так и технология построения структурных схем алгоритмов быстрого преобразования Фурье в соответствующих базисах.

Монография состоит из трех разделов. Первый раздел содержит подробное изложение способов построения базисных материнских и дочерних систем ДЭФ. Синтез систем дискретных экспоненциальных функций проводится в пространстве изоморфных отображений, в которых системы ДЭФ записываются в виде матриц, элементы которых принадлежат множеству Z_m . Показано, что в пространстве отображений гораздо проще, чем в пространстве оригиналов, решается задача факторизации матриц систем ДЭФ. Рассматриваются также вопросы построения алгоритмов БПФ в базисах материнских и дочерних систем ДЭФ для различных оснований систем счисления.

Во втором и третьем разделах книги на основе аппарата обобщенных преобразований Грея, решается задача синтеза симметричных систем функций Уолша и систем ВКФ соответственно с параметрами $m \geq 2$ и $n > 2$. Детально рассматривается проблема построения структурно-логических алгоритмов БПФ в базисах ВКФ.

Монография является самодостаточной в том плане, что содержит доходчивое и подробное изложение рассматриваемых вопросов, не требующее обращения к другим источникам. Автор книги рассматривает свою работу как научную монографию, которую можно использовать также в качестве учебного пособия. Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов высших технических учебных заведений.

Читателей, которые пожелают высказать свои замечания или предложения по монографии, просим направлять письма по электронному адресу: *abelnau@ukr.net*



1. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) включены в монографию на том основании, поскольку являются базовыми для построения симметричных систем функций Уолша и Виленкина — Крестенсона, рассматриваемых в двух последующих разделах книги.

1.1. Общие сведения

В классическом континуальном спектральном анализе комплексный спектр $\dot{X}(\omega)$ сигнала $x(t)$ определяется интегральным преобразованием Фурье

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.1)$$

в котором комплексная экспоненциальная функция

$$e^{-j\omega\tau} \quad (1.2)$$

представляет собой *континуальный базис* преобразования. В экспоненте (1.2) и преобразовании (1.1) аналоговые (непрерывные) параметры ω и τ есть угловая частота (с размерностью радиан/сек.) и время (сек.) соответственно.

Следовательно, континуальный базис (1.2) определяется на бесконечном интервале времени и бесконечном интервале частот.

Аналогом комплексных экспоненциальных функций (1.2) в дискретном анализе служат дискретные экспоненциальные функции

$$e(k, n) = e^{j \frac{2\pi}{N} kt}, \quad (1.3)$$

причем обе их переменные k и t принимают целочисленные значения $0, 1, \dots, N-1$. Число функций в системе равно числу отсчетов N каждой функции, называемое также *интервалом определения сигнала*.

Дискретную систему экспоненциальных функций (1.3) можно получить в результате дискретизации непрерывных аргументов ω и τ континуальной функции (1.2), ограничившись их N отсчетами:

$$\begin{aligned} \omega \circ &\rightarrow 2\pi k f_1; \\ \tau \circ &\rightarrow tT = t/F = t/Nf_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.4) k и t есть номер частотного и номер временного отсчетов функции (1.3) соответственно; T и F – период и частота временной дискретизации аналогового сигнала $x(t)$; f_1 – интервал частотной дискретизации; N – число отсчетов частотно-временной дискретизации.

Переходя в преобразовании (1.1) по формулам (1.4) от непрерывных аргументов ω , τ к дискретным величинам k , t и, заменив интеграл конечной суммой слагаемых, получим известную форму *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ)

$$\dot{X}(k) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \Psi^{kt}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (1.5)$$

где $\dot{X}(k)$ есть k -я гармоническая составляющая (гармоника) N -мерной последовательности дискретных отсчетов $x(t)$ сигнала $x(\tau)$, называемая также *коэффициентом ряда* ДПФ, или *комплексной амплитудой* k -й гармоники спектра, а

$$\Psi = e^{-j \frac{2\pi}{N}} \quad (1.6)$$

является *фазовым (поворачивающим) множителем* (ФМ).

Подмножество $\{x(t)\}$ принято называть *выборкой* сигнала $x(\tau)$, а N есть *объем выборки*. Последовательность отсчетов $x(t)$ в общем случае может быть комплексной. Совокупность коэффициентов (1.5) является дискретным аналогом континуального спектра (1.1) и служит основой построения системы *дискретных экспоненциальных функций*, которые обычно обозначают в виде

$$e(k, t) = \varphi_k(t) = \varphi(k, t) = \Psi^{kt},$$

где k – номер базисной функции, а t – аргумент функции, играющий роль дискретного времени.

Упорядоченную совокупность ДЭФ $\{e(k, t)\}$ обычно записывают в форме квадратной матрицы \mathbf{E}_N размерности N . Для частного случая $N=8$ матрица \mathbf{E}_8 имеет вид

$$\{e(k, t)\} \Rightarrow \mathbf{E}_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \\ \Psi^0 & \Psi^1 & \Psi^2 & \Psi^3 & \Psi^4 & \Psi^5 & \Psi^6 & \Psi^7 & \\ \Psi^0 & \Psi^2 & \Psi^4 & \Psi^6 & \Psi^8 & \Psi^{10} & \Psi^{12} & \Psi^{14} & \\ \Psi^0 & \Psi^3 & \Psi^6 & \Psi^9 & \Psi^{12} & \Psi^{15} & \Psi^{18} & \Psi^{21} & \\ \Psi^0 & \Psi^4 & \Psi^8 & \Psi^{12} & \Psi^{16} & \Psi^{20} & \Psi^{24} & \Psi^{28} & \\ \Psi^0 & \Psi^5 & \Psi^{10} & \Psi^{15} & \Psi^{20} & \Psi^{25} & \Psi^{30} & \Psi^{35} & \\ \Psi^0 & \Psi^6 & \Psi^{12} & \Psi^{18} & \Psi^{24} & \Psi^{30} & \Psi^{36} & \Psi^{42} & \\ \Psi^0 & \Psi^7 & \Psi^{14} & \Psi^{21} & \Psi^{28} & \Psi^{35} & \Psi^{42} & \Psi^{49} & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (1.7)$$

k

Для наглядности степени ФМ (1.6)

$$\Psi^{kt} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kt} = \cos \frac{2\pi}{N}kt - j \sin \frac{2\pi}{N}kt$$

удобно представлять на комплексной плоскости в виде векторов Ψ^l , $l = 0, 1, \dots$, вершины которых располагаются на единичной комплексной окружности.

На рис. 1.1 показаны положения векторов Ψ^l для $N=8$.

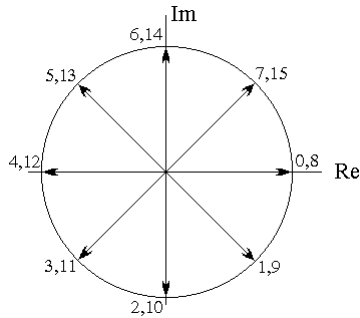


Рисунок 1.1. Представление векторов ФМ системы восьмиточечной ДЭФ на комплексной плоскости

Как видно из рис. 1.1, ДЭФ являются периодическими функциями. Это, в частности, означает, что

$$\Psi^{l+mN} = \Psi^l, \quad l = \overline{0, N-1}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

а

$$\Psi^{N/2+l} = -\Psi^l, \quad l = \overline{0, \frac{N}{2}-1}. \quad (1.9)$$

Согласно соотношениям (1.8) и (1.9) и рис. 1.1, матрица (1.7) оказывается избыточной, т. е. показатели степени ФМ могут быть минимизированы так, как показано на рис. 1.2.

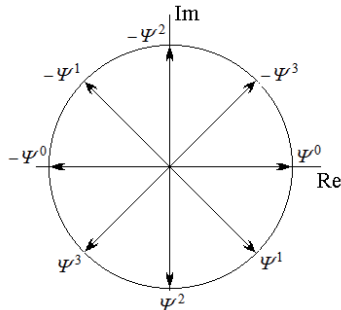


Рисунок 1.2. Представление векторов ФМ с минимальными фазами

Исходя из свойства периодичности комплексной экспоненты k -ю базисную функцию ДЭФ (которую принято называть *базисной функцией k -го порядка*) можно определить соотношением

$$e(k, t) = e\left(1, (kt)_N\right). \quad (1.10)$$

Будем считать матрицу ДЭФ *канонической*, если все ее элементы представлены с минимальными фазами, образующимися после вычитания из угла $2\pi kt / N$ целого числа 2π . Правило, введенное выражением (1.10), дает возможность представить каноническую форму матрицы ДЭФ восьмого порядка в таком виде

$$\{e(k, t)\} \Rightarrow \mathbf{E}_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Psi & -j & \Psi^3 & -1 & -\Psi & j & -\Psi^3 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \Psi^3 & j & \Psi & -1 & -\Psi^3 & -j & -\Psi \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\Psi & -j & -\Psi^3 & -1 & \Psi & j & \Psi^3 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -\Psi^3 & j & -\Psi & -1 & \Psi^3 & -j & \Psi \end{array} \right] \end{matrix} \cdot \quad (1.11)$$

Из анализа матрицы (1.11) легко приходим к следующему рекуррентному алгоритму формирования базиса ДЭФ

$$e(2k, t) = e\left(k, (2t)_N\right), \quad k \geq 1, \quad t = \overline{0, N-1} \quad (1.12)$$

– для четных и

$$e(2k+1, t) = e(2k, t) e(1, t) \quad (1.13)$$

– для нечетных функций.

Отметим, что выражения (1.12) и (1.13) не заменяют, а дополняют правило формирования базисных функций в системе ДЭФ (1.10). Начальными условиями для соотношений (1.12) и (1.13) являются

$$e(0, t) = 1, \quad t = \overline{0, N-1}$$

и

$$e(1,t) = \begin{cases} \Psi^t, & t = \overline{0, N/2-1}; \\ -\Psi^{t-N/2}, & t = \overline{N/2, N-1}. \end{cases}$$

Обратим внимание на следующие особенности матрицы (1.11). Во-первых, элементы правой половины четных базисных функций повторяют элементы левой половины, т. е. для $k, t = \overline{0, N/2-1}$

$$e(k + N/2, 2t) = e(k, 2t), \quad (1.14)$$

и, во-вторых, элементы правой половины нечетных функций инверсны по отношению к соответствующим элементам левой половины функций. Другими словами,

$$e(2k+1, t + N/2) = -e(2k+1, t). \quad (1.15)$$

В силу симметричности матрицы E_N любые выводы относительно строк справедливы также относительно столбцов матрицы преобразования. Из этого вытекает, в частности, что элементы нижней половины четных столбцов матрицы E_N повторяют элементы верхней половины, т. е.

$$e(k + N/2, 2t) = e(k, 2t), \quad (1.16)$$

а элементы нижней половины нечетных столбцов матрицы E_N инверсны по отношению к соответствующим элементам верхней половины столбцов

$$e(k + N/2, 2t+1) = -e(k, 2t+1). \quad (1.17)$$

Соотношения (1.14)–(1.17) существенно сокращают объем вычислений при формировании канонической матрицы E_N по рекуррентным формулам (1.12) и (1.13) для произвольного порядка $N = 2^n$.

Как известно, разные базисы могут доставлять разные скорости вычисления спектров дискретных сигналов с фиксированными объемами выборки; при изменении базиса меняется и спектр сигнала: точнее – меняются *амплитудно-фазовые характеристики* (АФХ) спектра. Однако в ряде приложений, например, связанных с измерением частоты сигнала спектроанализаторами, АФХ спектра фильтруемого сигнала в выбранном базисе может оказаться не критической.

Более важно при решении задач идентификации (измерении или определении) частоты входного сигнала, чтобы замена базиса не приводила к нарушению линейной связанности частотных шкал процессора дискретного преобразования Фурье.

Понятия *частотных шкал процессора ДПФ* и их *линейной связанности* не являются, по-видимому, общепринятыми в теории спектрального анализа дискретных сигналов и требуют дополнительных разъяснений. Прежде всего, сделаем некоторые уточнения. Во-первых, следует различать *входную* и *выходную частотные шкалы* процессора ДПФ. Во-вторых, линейную связанность частотных шкал процессора будем рассматривать по отношению к входному сигналу типа *дискретизированной комплексной экспоненты*.

Итак, пусть на вход процессора ДПФ подана последовательность дискретных сигналов

$$\dot{x}_\gamma(t) = e^{j\frac{2\pi}{N}\gamma t}, \quad \gamma, t = \overline{0, N-1}, \quad (1.18)$$

где γ – нормированная частота входного сигнала; t – нормированное дискретное время или номер отсчета в последовательности $\{x_\gamma(t)\}$.

Определение 1.1. *Частотную шкалу, на которой отложены значения нормированной частоты γ входного сигнала, назовем входной частотной шкалой процессора ДПФ.*

Откликом (выходным сигналом) процессора является комплексный спектр $\dot{X}_\gamma(k)$ сигнала $\dot{x}_\gamma(t)$ в некотором базисе $\{\varphi(k, t)\}$. Зададим спектр $\dot{X}_\gamma(k)$ соотношением

$$\dot{X}_\gamma(k) = \sum_{t=0}^{N-1} \dot{x}_\gamma(t) \varphi(k, t),$$

где k – номер гармоники, а в правой части – порядок базисной функции.

Определение 1.2. *Частотную шкалу, на которой отложены значения номеров k гармоник спектра выходного сигнала, назовем выходной частотной шкалой процессора ДПФ.*

В классической теории дискретного спектрального анализа понятие «гармоника» обычно ассоциируется с понятием *компоненты* $\dot{X}(k)$ спектра сигнала $\dot{x}(t)$ в базисе ДЭФ. В данной работе для простоты мы несколько отойдем от упомянутой нормы, и под *гармониками* будем понимать компоненты дискретного спектра $\dot{X}(k)$ в любом дискретном базисе $\{\varphi(k, t)\}$ ортогонального разложения сигнала $\dot{x}(t)$.

Пусть k – номер частотного канала процессора ДПФ (номер гармоники спектра или значение нормированной частоты выходного сигнала процессора),

которому соответствует максимум модуля гармоники $\dot{X}(k)$. Тогда, если соблюдается тождество

$$k \equiv \gamma \quad \text{для всех } \gamma = \overline{0, N-1}, \quad (1.19)$$

то будем говорить, что частотные шкалы процессора ДПФ линейно связаны (или линеаризованы). Другими словами,

Если на вход процессора ДПФ подан дискретный комплексно-экспоненциальный сигнал на частоте γ , а номер k выходного канала процессора, в котором формируется отклик (гармоника спектра) с максимальной амплитудой, совпадает с γ , то это означает, что базис $\{\varphi(k, t)\}$ доставляет линейную связанность частотным шкалам процессора.

Базис ДЭФ как раз и является тем базисом, который обеспечивает линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ. Действительно, гармоника $\dot{X}(k)$ комплексно-экспоненциального сигнала (1.18) в базисе ДЭФ, согласно выражениям (1.5) и (1.6), определяется соотношением

$$\dot{X}_\gamma(k) = \sum_{t=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}t(\gamma-k)}. \quad (1.20)$$

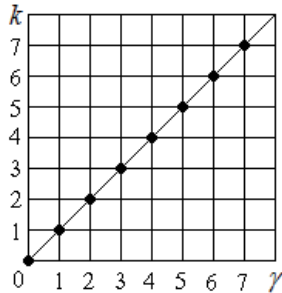
Простейший анализ правой части формулы (1.20) приводит к значению

$$\dot{X}_\gamma(k) = \begin{cases} N, & k = \gamma; \\ 0, & k \neq \gamma, \end{cases}$$

т. е. тождество (1.19) соблюдается, а из этого следует, что

Базис ДЭФ обеспечивает линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ.

Принцип линейной связанности частотных шкал процессора ДПФ иллюстрирует график, показанный на рис. 1.3.

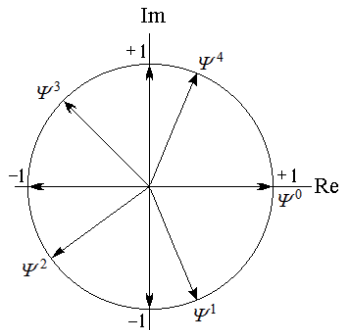


**Рисунок 1.3. К соотношению частотных шкал
восьмиточечного процессора ДПФ в базисе ДЭФ**

Класс базисов, которые доставляют процессорам ДПФ линейную связанность их частотным шкалам, может быть расширен, если кроме амплитудных использовать и фазовые характеристики выходных частотных каналов процессора, чему более подробное разъяснение будет дано в разделе 2 монографии.

1.2. Изоморфные преобразования систем ДЭФ

Система ДЭФ может быть определена на любом интервале N , как четном, так и нечетном. На рис. 1.4 показан способ геометрического отображения на единичном круге комплексной плоскости фазовых множителей Ψ в l -й степени, $l=0, 1, 2, \dots$, заданных формулой (1.6), для интервала определения $N=5$.



**Рисунок 1.4. Векторная диаграмма
фазовых множителей на интервале $N=5$**

Матрица ДЭФ с минимальными фазами, соответствующая векторной диаграмме, представленной на рис. 1.4, имеет вид

$$E_5 = \{e(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} \psi^0 & \psi^0 & \psi^0 & \psi^0 & \psi^0 \\ \psi^0 & \psi^1 & \psi^2 & \psi^3 & \psi^4 \\ \psi^0 & \psi^2 & \psi^4 & \psi^1 & \psi^3 \\ \psi^0 & \psi^3 & \psi^1 & \psi^4 & \psi^2 \\ \psi^0 & \psi^4 & \psi^3 & \psi^2 & \psi^1 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (1.21)$$

Матрицу (1.21) можно существенно упростить, если оставить в ее строках лишь значения показателей степени фазовых множителей

$$E_5 = \{e(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (1.22)$$

Представление (1.22) назовем *изоморфным отображением* матрицы ДЭФ (1.21). Изоморфное преобразование канонической матрицы ДЭФ E_N состоит в замене элементов ψ^l этой матрицы числами l .

Матрица (1.21) определяет систему ДЭФ пятого порядка в *пространстве оригиналов*, тогда как (1.22) задает эту же систему в *пространстве отображений*. Замена системы (1.21) на (1.22) означает, кроме всего прочего, переход от комплексной формы базиса ДЭФ к вещественной форме, что сопровождается определенным выигрышем при реализации вычислительных процедур на цифровых процессорах.

Из анализа матрицы (1.22) приходим к следующему правилу синтеза базисных функций пятого порядка

$$e(k, t) = e(1, (kt)_5), \quad k = \overline{2, 5}, \quad (1.23)$$

где $(x)_m$ – функция модульной арифметики, равная остатку от деления числа x на m , или значение числа x по модулю m ($\text{mod } m$).

Соотношение (1.23) справедливо для любого значения m , т. е. совокупность базисных функций k – го порядка системы ДЭФ на произвольном интервале $m = N$ определяется выражением

$$e(k, t) = e(1, (kt)_N), \quad k = \overline{2, N-1}, \quad (1.24)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} e(0, t) &= 0 \\ e(1, t) &= t \end{aligned} \right\}, \quad t = \overline{0, N-1}. \quad (1.25)$$

Пара (1.25) задает начальные условия алгоритму (1.24).

Более удобным для приложений может оказаться представление алгоритма синтеза ДЭФ на заданном интервале N соотношениями

$$e(2k, t) = e(k, (2t)_N) \quad (1.26)$$

– для четных и

$$e(2k+1, t) = (e(1, t) + e(2k, t))_N \quad (1.27)$$

– для нечетных функций.

Выражения (1.26) и (1.27) можно объединить, представив их в виде

$$e(k, t) = (kt)_N, \quad k, t = \overline{0, N-1}, \quad (1.28)$$

которое назовем *обобщенной формулой базиса ДЭФ* в изоморфном пространстве (или в пространстве изоморфного отображения).

1.3. Синтез симметричных систем ДЭФ

Алгоритм синтеза матриц преобразования ДЭФ, представленный соотношениями (1.26)–(1.28) с учетом начальных условий (1.25), приводит к формированию симметрической относительно главной диагонали матрицы E_N , удовлетворяющей условию

$$e(k, t) = e(t, k), \quad k, t = \overline{0, N-1}. \quad (1.29)$$

Следствием условия (1.29) является то, что любые выводы относительно переменной t будут справедливы также для переменной k , и наоборот.

Основная задача, решаемая в данном параграфе раздела, кроме непосредственно синтеза матриц, состоит также в определении числа L_N симметрических матриц (систем) ДЭФ произвольного порядка N [11].

Симметричные системы ДЭФ могут быть получены в результате определенным образом организованных перестановок строк *базовой матрицы*

ДЭФ, N -го порядка, называемой далее *материнской*, которая синтезируется последовательностью формул (1.26) и (1.27) с учетом начальных условий (1.25).

Примем во внимание, что верхняя строка матрицы ДЭФ (базисная функция нулевого порядка) не может быть переставлена ни на какую другую строчку, поскольку это заведомо приводит к потере симметричности матрицы. Следовательно, на интервале определения N всего существует $(N-1)!$ различных способов перестановки базисных функций ДЭФ, из которых L_N вариантов приводят к образованию симметричных систем ДЭФ.

Введем полезные для дальнейшего изложения материала ряд простых терминологических определений.

Определение 1.3. *Под номером k базисной функции $\varphi_k(t)$ системы ДЭФ будем понимать номер строки, которую занимает функция в матрице ДЭФ.*

Нумерацию строк, сверху вниз, как и столбцов, слева направо, осуществляют в естественном порядке, от 0 до $N-1$.

Определение 1.4. *Порядком N базисной функции $\varphi_k(t)$ системы ДЭФ будем называть интервал, на котором определена функция.*

Следовательно, порядок N базисной функции $\varphi_k(t)$ системы ДЭФ совпадает с порядком матрицы ДЭФ.

Определение 1.5. *Примитивной называется такая базисная функция $\varphi_k(t)$ матрицы ДЭФ N -го порядка в пространстве изоморфного отображения, которая содержит полную систему вычетов по модулю N .*

Определение 1.6. *К полной системе вычетов по модулю N будем относить совокупность наименьших неотрицательных чисел от нуля до $N-1$.*

В частности, все базисные функции системы (1.22), за исключением нулевой, являются примитивными функциями. Полную систему вычетов по модулю N обычно записывают в виде Z_N , полагая $Z_N \in \overline{0, N-1}$.

Легко показать, что симметрическая матрица ДЭФ N -го порядка, которая образуется по формулам (1.25)–(1.27), не является единственной. Рассмотрим для примера симметрическую матрицу ДЭФ третьего порядка, которую обозначим $E_3^{(1)}$. Имеем

$$E_3^{(1)} = \begin{matrix} & & & 0 & 1 & 2 & t \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ k & & & & & & \end{matrix} . \quad (1.30)$$

Переставив строки матрицы (1.30), соответствующие номерам функций $k=1$ и 2 , получим матрицу

$$E_3^{(2)} = \begin{matrix} & & & 0 & 1 & 2 & t \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 2 \\ k & & & & & & \end{matrix} , \quad (1.31)$$

Матрица $E_3^{(2)}$ подобна матрице $E_3^{(1)}$ и также является симметрической.

Как и в системе (1.22) все ненулевые базисные функции систем ДЭФ (1.30) и (1.31) относятся к подклассу примитивных функций. Такая же особенность ненулевых базисных функций (примитивность) сохраняется для всех систем ДЭФ, порядок которых N является простым числом.

Примем во внимание, что все простые числа, начиная с числа $N=3$, являются нечетными числами. Вариант, когда $N=2$ (четное простое число), приводит к вырожденному случаю и ему соответствует единственная симметрическая матрица ДЭФ второго порядка

$$E_2 = \begin{matrix} & & 0 & 1 & t \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ k & & & & \end{matrix} . \quad (1.32)$$

Определение 1.7. *Базисную функцию $\varphi_1(t)$ N -го порядка, расположенную в первой строке симметричной системы ДЭФ, будем называть образующей (порождающей) функцией системы.*

В частности, образующими функциями систем ДЭФ третьего порядка (1.30) и (1.31) есть базисные функции $\varphi_1^{(1)}(t) = \{0, 1, 2\}$ и $\varphi_1^{(2)}(t) = \{0, 2, 1\}$ соответственно. При этом нижний индекс k функций $\varphi_k^{(l)}(t)$ означает номер базисной функции, а верхний индекс l – номер системы ДЭФ.

Определение 1.8. Систему ДЭФ N -го порядка, образующая функция которой $\varphi_1(t)$ составлена из чисел, расставленных в естественном порядке от 0 до $N-1$, будем называть материнской системой ДЭФ.

Определение 1.9. Все симметричные системы ДЭФ произвольного N -го порядка, не являющиеся материнскими, будем называть сестринскими системами ДЭФ.

Следовательно, системы ДЭФ (1.22), как и (1.30), относятся к материнским системам ДЭФ пятого и третьего порядков соответственно, тогда как (1.31) является сестринской системой ДЭФ третьего порядка.

Сформулированные выше определения составляют основу следующего фундаментального положения.

Утверждение 1.1. В качестве образующих функций $\varphi_1(t)$ симметричных систем ДЭФ произвольного N -го порядка в пространстве отображений могут быть использованы только примитивные базисные функции этих систем.

Доказательство. Рассмотрим материнскую систему ДЭФ четвертого порядка, матрица которой $E_4^{(1)}$, согласно соотношениям (1.28), имеет вид

$$E_4^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \cdot \end{matrix} \quad (1.33)$$

Покажем, к каким результатам приходим, попытавшись применить в качестве образующей базисной функции единственную из трех ненулевых функций матрицы (1.33), не являющуюся примитивной, т. е. функцию $\varphi_2(t) = (0, 2, 0, 2)$.

В основу синтеза симметрической матрицы ДЭФ положим метод направленной перестановки базисных функций [7, 20]. Идея метода состоит в следующем. Как об этом уже было сказано ранее, верхней (первой) строкой матрицы любой системы ДЭФ должна быть нулевая базисная функция, т. е. функция, состоящая из одних нулей. На месте второй строки матрицы может быть поставлена одна из $N-1$ ненулевых базисных функций. Оставшиеся

$N-2$ базисные функции расставляются в такой последовательности, при которой соблюдается условие симметричности (1.29) формируемой матрицы.

Согласно условию (1.29), каждый столбец симметрической матрицы повторяет соответствующую строку этой матрицы, т. е. левый (нулевой) столбец матрицы должен совпадать с верхней (нулевой) строкой матрицы, первый столбец – с первой строкой матрицы и т. д.

Первые два этапа (шага) синтеза матрицы ДЭФ по методу направленных перестановок базисных функций представлены на рис. 1.5.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\
 0 & \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & & & \\
 0 & & & \\
 0 & & &
 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 k
 \end{array} & ; & \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\
 0 & \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & & \\
 0 & 2 & &
 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \rightarrow \\
 3 \\
 k
 \end{array} \\
 \text{Шаг 2}
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 1.5. Этапы синтеза матрицы ДЭФ четвертого порядка

Из этапов, представленных на рис. 1.5, следует, что уже на втором этапе (шаге) синтеза симметрической матрицы строке, выделенной стрелкой, не отвечает ни одна из базисных функций матрицы (1.33), поскольку строка содержит два подряд стоящих нуля. Тем самым и завершается доказательство Утверждения 1.1 ■

К совершенно другому результату приходим, если в качестве образующей функции матрицы выбрать вторую примитивную функцию материнской системы четвертого порядка (1.33), т. е. функцию $\varphi_3(t) = (0, 3, 2, 1)$. Три этапа (первый шаг, как тривиальный, опущен) синтеза системы ДЭФ $E_4^{(2)}$ показаны на рис. 1.6.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\
 0 & \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & & \\
 0 & 1 & &
 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 k
 \end{array} & ; & \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\
 0 & \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 2 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 2 \\
 0 & 1 & 2 &
 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 k
 \end{array} \\
 \text{Шаг 3}
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 1.6. Этапы синтеза матрицы $E_4^{(2)}$

Из анализа этапов синтеза симметрических матриц ДЭФ, представленных на рис. 1.6, вытекает важнейшее положение, которое с целью систематизации излагаемого материала формулируется в виде утверждения, не требующее доказательства.

Утверждение 1.2. *Примитивная базисная функция системы ДЭФ в пространстве изоморфного отображения, будучи поставленной во вторую строку синтезируемой матрицы, однозначно определяет порядок следования базисных функций, размещаемых во всех остальных строках симметрической матрицы ДЭФ N -го порядка.*

Проиллюстрируем применение утверждения 1.2 на примере синтеза сестринских симметрических матриц ДЭФ пятого порядка. Выберем для этих целей из материнской системы (1.22) примитивную базисную функцию

$$\varphi_2(t) = (0, 2, 4, 1, 3). \quad (1.34)$$

В соответствии с правилом симметрии (1.29) на основании образующей функции (1.34) выпишем первые две верхние строки и два левых столбца синтезируемой матрицы $E_5^{(2)}$

$$E_5^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & t \\ 0 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & & & & \\ 1 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] & & & & \\ 2 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & & & \end{array} \right] & & & & \\ 3 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & & \end{array} \right] & & & & \\ 4 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & & & \end{array} \right] & & & & \\ k & & & & & & \end{matrix} \quad (1.35)$$

Согласно предварительной форме (1.35), вслед за образующей функцией $\varphi_2(t)$ матрицы $E_5^{(2)}$ следует записать четвертую базисную функцию $\varphi_4(t)$ матрицы (1.22), затем первую $\varphi_1(t)$ и последней – третью $\varphi_3(t)$ базисную функцию материнской системы (1.22). Получим

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad t \\
 0 \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 k
 \end{array}
 \cdot$$

Оставшиеся две симметрические матрицы $E_5^{(3)}$ и $E_5^{(4)}$ формируются аналогичным образом и имеют вид

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad t \\
 0 \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 k
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad t \\
 0 \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 k
 \end{array}
 \cdot$$

Перейдем к рассмотрению второго примера, полагая N составным числом,

$$N = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_m^{l_m}, \quad (1.36)$$

где p_i , $i = \overline{1, m}$, – простые числа, а $l_i \geq 1$ – натуральные числа.

Упростим представление (1.36), приняв $N = 2 \cdot 3$. Материнская система ДЭФ шестого порядка такова

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad t \\
 0 \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 k
 \end{array}
 \cdot
 \quad (1.37)$$

Обратим внимание на такие особенности системы (1.37). Часть базисных функций матрицы, а именно, функции первого и пятого порядков, содержат

полный набор целых чисел от 0 до $N-1=5$, то есть образуют полную систему вычетов по модулю N . Такие функции носят, как было определено выше, названия примитивных и могут быть использованы в качестве образующих функций симметричных систем ДЭФ. Оставшиеся функции системы (1.37) включают как минимум два нулевых значения, в силу чего порождающими функциями систем ДЭФ быть не могут.

Примитивная базисная функция $\varphi_5(t) = (0, 5, 4, 3, 2, 1)$, будучи размещенной во втором столбце формируемой матрицы $E_6^{(2)}$, однозначно определяет порядок заполнения оставшихся строк симметрической матрицы $E_6^{(2)}$, которая принимает вид

$$E_6^{(2)} = \begin{matrix} & & & & & & t \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ k & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} .$$

Вполне очевидным является следующее заключение

Утверждение 1.3. *Мощность L_N множества симметричных систем ДЭФ N -го порядка определяется количеством целых чисел на интервале N , не имеющих с N общих делителей, т. е. совпадает с функцией Эйлера $\varphi(N)$, равной подмножеству чисел на интервале $\overline{1, N-1}$ взаимно простых с N . Следовательно*

$$L_N = \varphi(N).$$

Полученные результаты имеют достаточно простое толкование. В самом деле, на этапе синтеза дочерних симметричных систем ДЭФ проверяется возможность замещения базисной функции первого порядка той или иной базисной функцией материнской системы ДЭФ. Пусть задан порядок N матрицы симметричной системы ДЭФ. Выясним, какие базисные функции материнской системы могут быть использованы в качестве базисных функций первого порядка дочерних систем ДЭФ. Очевидно, если k не является числом

взаимно простым с N , то всегда найдется такое значение t , которое приводит к равенству

$$(kt)_N = 0.$$

Наличие нуля на t -й позиции k -й базисной функции материнской системы ДЭФ, используемой в качестве образующей функции предполагаемой дочерней системы, приводит к тому, что t -я строка этой системы в изоморфном отображении будет содержать два подряд стоящих нуля. А это недопустимо, так как не существует ни одной базисной функции, в составе которой присутствует более одного нуля.

Очевидно, что если N является простым числом, то система ДЭФ может быть представлена $N-1$ симметрическими матрицами, а если выражается числом $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, то количество симметрических матриц равно количеству нечетных чисел на интервале N , то есть составляет $N/2$.

1.4. Взаимосвязь систем ДЭФ

Все симметричные системы ДЭФ N -го порядка (материнские и дочерние) взаимосвязаны. То есть, если известна структура хотя бы одной матрицы ДЭФ, остальные вычисляются однозначно. Взаимосвязь материнской системы ДЭФ с дочерними системами определяется простым эмпирическим соотношением [26]. Пусть a есть значение второго элемента базисной функции первого порядка дочерней системы ДЭФ. Обозначим через $e(k, t)$ и $d(k, t)$ k -е базисные функции материнской и дочерней системы соответственно. Тогда

$$d(k, t) = e((ak)_N, t), \quad k, t = \overline{0, N-1}.$$

В том случае, когда множество симметричных систем ДЭФ содержит всего лишь одну дочернюю систему, то материнская M и дочерняя D системы взаимосвязаны соотношением, показанным на рис. 1.7.

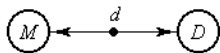


Рисунок 1.7. Взаимосвязь материнской системы с единственной дочерней системой ДЭФ

Оператор d означает, что для получения значений элементов базисных функций системы D (M) соответствующие элементы системы M (D)

должны быть умножены на коэффициент d по модулю N , причем $d = N - 1$, где N равен порядку базисной функции материнской системы M , порождающей дочернюю систему D .

Всего имеется лишь три группы систем ДЭФ, содержащих пару, состоящую из материнской и одной дочерней матриц. Это системы, порядок N которых равен 3, 4 и 6, а операторам d отвечают значения 2, 3 и 5 соответственно.

Если порядок N систем ДЭФ является простым числом, то каждой из них отвечают $N - 1$ симметрических матриц ДЭФ. В частности, алгоритм перехода между системами ДЭФ простого порядка $N = 5$ показан на рис. 1.8.

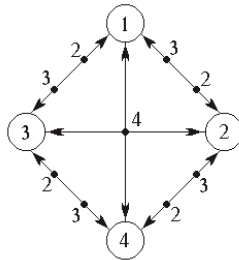


Рисунок 1.8. Граф взаимосвязи систем ДЭФ пятого порядка

Введем для симметричной системы ДЭФ N -го порядка, второй элемент базисной функции первого порядка которой равен k , обозначение $D_{N,k}$, где N – порядок матрицы, играющий роль модуля преобразования. Тогда $D_{N,1}$ есть материнская система. С учетом введенных обозначений, согласно рис. 1.8, переход от системы $D_{5,4}$ к системе $D_{5,3}$ можно осуществить, умножив все элементы матрицы системы $D_{5,4}$ на 2. В то же время для перехода от системы $D_{5,3}$ к системе $D_{5,4}$ потребуется умножить все компоненты матрицы системы $D_{5,3}$ на коэффициент 3. Результат произведения берется по модулю $N = 5$.

Граф взаимосвязи систем ДЭФ седьмого порядка отображен на рис. 1.9.

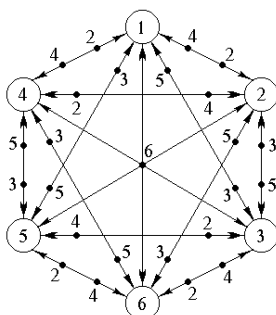


Рисунок 1.9. Граф взаимосвязи систем ДЭФ седьмого порядка

По четыре узла (соответственно и по четыре симметрические матрицы) содержат системы ДЭФ восьмого и десятого порядков (рис. 1.10).

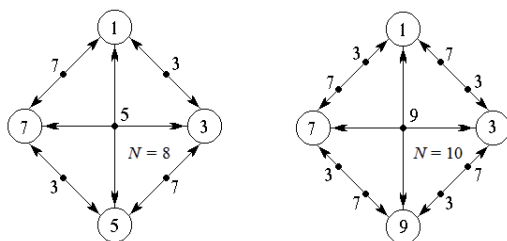


Рисунок 1.10. Граф взаимосвязи систем ДЭФ:

Отобразим характер взаимосвязи симметричных систем ДЭФ девятого порядка (рис. 1.11).

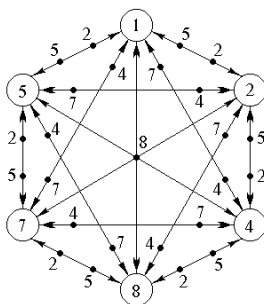


Рисунок 1.11. Граф взаимосвязи систем ДЭФ девятого порядка

Приведенные данные относительно взаимосвязи симметричных систем ДЭФ будут использованы в пределах этого раздела монографии при решении проблемы синтеза алгоритмов быстрого преобразования Фурье в базисах дискретных экспоненциальных функций.

1.5. Факторизация симметрических матриц ДЭФ

Необходимость проведения процедуры факторизации матриц, отвечающих тому или иному базису, связана с проблемой построения алгоритмов (структурных схем) быстрого преобразования Фурье в заданном базисе (п. 1.6).

Факторизация квадратных матриц N -го порядка означает представление ее в виде произведения сомножителей, являющихся разреженными квадратными матрицами того же порядка, что и исходная матрица.

Факторизованными могут быть лишь матрицы, порядок которых N является составным числом, т. е. при условии, что

$$N = \prod_{i=1}^k n_i^{l_i}, \quad (1.38)$$

где n_i – простое число; k – число простых сомножителей, образующих составное число N , и степень l_i – натуральное число.

Представлению (1.38) соответствует *факторизованная матрица* ДЭФ N -го порядка

$$E_N = \prod_{i=1}^k F_i, \quad (1.39)$$

где матрицы F_i по аналогии с простыми числами назовем *простыми матрицами*. Произведение (1.39) простых матриц образует факторизованную (составную) матрицу E_N .

Замечательной особенностью матриц F_i является то, что они включают большое число нулевых элементов. Такие матрицы принято называть *сильно разреженными* матрицами. Матрица F_i , отвечающая простому числу n_i , содержит в каждой строке и каждом столбце n_i ненулевых элементов.

Пусть x – вектор-столбец входных сигналов; E_N – матрица преобразования; y – вектор-столбец выходных сигналов, т. е.

$$\mathbf{y} = \mathbf{E}_N \mathbf{x}. \quad (1.40)$$

Число элементов N вектор-столбцов \mathbf{x} и \mathbf{y} равно порядку квадратной матрицы \mathbf{E}_N . В терминах спектрального анализа принято говорить, что \mathbf{y} есть *спектр* дискретного сигнала \mathbf{x} в базисе \mathbf{E}_N .

С учетом факторизации (1.39), представим спектр (1.40) в виде

$$\mathbf{y} = \left(\prod_{i=1}^k \mathbf{F}_i \right) \mathbf{x}. \quad (1.41)$$

Предположим, что процедура матричных преобразований (1.41) организована таким образом, что в ней исключены операции вычисления произведений на нулевые элементы матриц \mathbf{F}_i . В таком случае определение вектора \mathbf{y} по формуле (1.41) оказывается более экономным, чем вычисление по формуле (1.40), причем экономия быстро возрастает с увеличением размеров матриц (и числа нулевых элементов).

Принципы факторизации матриц преобразования (базисных матриц) лежат в основе построения алгоритмов *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Некоторые варианты реализации алгоритмов БПФ рассмотрены в п. 1.6 данного раздела.

Существует много способов факторизации составных матриц, которые приводят к различным структурным схемам БПФ. В рамках этого параграфа мы будем следовать в основном работе А. М. Трахтмана [40], причем элементы факторизуемых матриц ДЭФ удобно записывать в виде показателей степени при соответствующих фазовых множителях Ψ , т. е. представлять матрицу ДЭФ в изоморфном отображении.

Опуская математические выкладки, но не в ущерб корректности конечных результатов, приведем практические приемы факторизации составных матриц ДЭФ, рассматриваемых в порядке возрастания их размерности N .

Итак, обратимся к материнской системе ДЭФ четвертого порядка

$$\mathbf{E}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Сделаем некоторые уточнения относительно матрицы (1.42). Следует принять к вниманию, что нулевые элементы этой матрицы (как и всех

последующих матриц ДЭФ) ни есть нуль в обычном понимании. Фактически этот нуль означает, что на месте данного элемента стоит арифметическое число, соответствующее значению Ψ в нулевой степени, т. е.

$$0 \Rightarrow \Psi^0 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 0} = 1,$$

где N – порядок матрицы ДЭФ.

Точно таким же образом

$$1 \Rightarrow \Psi^1 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 1}$$

и т. д.

В том случае, когда в факторизованной матрице на месте какого-либо элемента должен стоять арифметический нуль, с целью устранения возможной неоднозначности будем ставить на этом месте прочерк.

Запишем матрицу $E_4^{(1)}$ в виде произведения

$$E_4^{(1)} = F_1 F_2, \quad (1.43)$$

причем обе матрицы F_i , $i=1, 2$, являются матрицами четвертого порядка, отвечающие одному и тому же значению простых чисел $n_1=2$ и $n_2=2$. Это означает, что матрицы F_1 и F_2 должны содержать в каждой строке и каждом столбце по два значащих элемента. Остальные (незначащие) элементы матриц F_1 и F_2 будем заполнять прочерками.

Выберем в качестве элементов матрицы F_1 элементы левой половины строк матрицы (1.42). Сохраним в матрице F_1 исходное положение выбранных элементов материнской системы $E_4^{(1)}$ для четных строк (нумерация строк матриц осуществляется сверху вниз последовательностью чисел от 0 до $N-1$), а элементы нечетных строк сместим вправо на $N/2$, т. е. на две позиции. Такие смещения сделаны для того, чтобы каждая строка, и каждый столбец матрицы F_1 содержали одинаковое число (равное двум) непустых элементов. Приходим к матрице

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 1 \\ 0 & 2 & - & - \\ - & - & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Матрицу F_2 следует сформировать (выбрать, сконструировать) таким образом, чтобы соблюдалось равенство (1.43). Как следует из верхней строки

матрицы (1.44), базисную функцию нулевого порядка системы $E_4^{(1)}$ (нулевую строку матрицы (1.42)) получим, выбрав следующим образом первые две строчки матрицы F_2 :

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.45)$$

В матрице (1.45) сохранена выше принятая нумерация строк (столбцов) матриц. То есть, верхняя строка (левый столбец) имеет номер 0, следующая – 1 и так далее. Очевидно, умножив нулевую строку матрицы (1.44) на матрицу (1.45), причем в операции умножения не участвуют элементы матриц, отмеченные прочерком, получим базисную функцию нулевого порядка системы $E_4^{(1)}$, являющуюся нулевой строкой матрицы (1.42).

Здесь уместно напомнить, что в изоморфном отображении операция матричного произведения выполняется формально по тем же правилам, как и в обычном матричном исчислении, только поэлементное произведение заменяется операцией поэлементного сложения по модулю N . Понять способ такой замены можно на следующем примере. Пусть $N = 4$ и

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b & - & - \\ - & - & 0 & 1 \\ 0 & 2 & - & - \\ - & - & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} c & - & d & - \\ - & e & - & f \end{bmatrix}.$$

Тогда верхняя строка произведения матриц M_1 и M_2 (в изоморфном пространстве) сводится к вычислениям ее четырех элементов по формулам

$$(a+c)_4; \quad (b+e)_4; \quad (a+d)_4; \quad (b+f)_4.$$

Для того чтобы получить базисную функцию первого порядка системы $E_4^{(1)}$ (или первую строку матрицы (1.42)), достаточно умножить (по описанной выше схеме) первую строку матрицы (1.44) на матрицу

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & 2 & - \\ - & 0 & - & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

содержащую вторую и третью строки матрицы F_2 .

Объединяя матрицы (1.45) и (1.46), получим

$$F_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 2 & - \\ - & 0 & - & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Легко проверить, что произведение матриц (1.44) и (1.47) приводит к матрице (1.42), чем и завершается процедура факторизации материнской системы ДЭФ четвертого порядка, заданной соотношением (1.42). Обратим внимание на то, что умножение матриц осуществляется по модулю N , совпадающему с основанием системы счисления ДЭФ (или порядком системы ДЭФ).

Переходим к факторизации матрицы ДЭФ 6-го порядка

$$E_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & | & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & | & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

Составной порядок $N = n_1 \cdot n_2 = 6$ этой матрицы раскладывается на два простых множителя 2 и 3, причем очередность их в произведении определяет тип факторизованных матриц F_1 и F_2 , образующих матрицу

$$E_6^{(1)} = F_1 F_2. \quad (1.49)$$

Если предположить, что $n_1 = 3$, а $n_2 = 2$, то в матрице F_1 каждая строка должна содержать по три последовательно расположенных значащих элемента, а если $n_1 = 2$, то в матрице F_1 в каждой строке должны находиться по два последовательно расположенных значащих элемента. Матрица F_2 конструируется в зависимости от формы матрицы F_1 . Таким образом, существуют, по крайней мере, два варианта факторизации матрицы ДЭФ шестого порядка. Рассмотрим оба этих варианта.

Итак, положим $n_1 = 3$. Это будет означать, что в каждой строке матрицы F_1 следует разместить последовательно по три первых элемента

соответствующих базисных функций системы $E_6^{(1)}$. Эти элементы находятся в левой части относительно пунктирной линии в матрице (1.48). Кроме того, значимые элементы нечетных строк (или базисных функций нечетного порядка) следует сместить на три позиции вправо. Следовательно,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Для соблюдения равенства (1.49) матрица F_2 должна выглядеть так

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & - & - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - & 0 & - \\ - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 3 & - & - \\ - & 0 & - & - & 3 & - \\ - & - & 0 & - & - & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Перемножив матрицы (1.50) и (1.51), получим матрицу (1.48), что является свидетельством корректности проведенной процедуры факторизации матрицы ДЭФ шестого порядка $E_6^{(1)}$.

В отличие от матрицы (1.50), каждая строка и каждый столбец которой содержат по три значащих элемента, матрица (1.51) имеет во всех строчках и столбцах по два значащих элемента. Отметим, что

число значащих элементов в строках (столбцах) матриц F_i совпадает со значением простого числа p_i , которому соответствует матрица F_i , $i=1,2$.

Матрицы, подобные матрице (1.50), назовем *строчно-факторизованными матрицами*. Их отличительная особенность состоит в том, что значащие элементы плотно заполняют отдельные участки строк этой матрицы. Матрицы, подобные матрице (1.51), будем называть *диагонально-*

факторизованными матрицами. Их отличительная особенность состоит в том, что значащие элементы этой матрицы плотно заполняют некоторые ее диагонали.

А теперь обратимся ко второму варианту факторизации матрицы ДЭФ шестого порядка. В этом варианте $n_1=2$, а $n_2=3$. Такое ранжирование простых чисел n_i означает, что в матрице F_1 каждая строка и каждый столбец содержат по два значащих элемента, причем элементы строк состояются из первых двух элементов соответствующих базисных функций системы $E_6^{(1)}$. Сформулированным условиям удовлетворяет матрица

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 1 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 2 \\ 0 & 3 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 4 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Из сопоставления матриц (1.48) и (1.52) легко приходим к алгоритму формирования матрицы F_1 . Элементы строк матрицы F_1 образуются из элементов первых двух столбцов матрицы $E_6^{(1)}$ в результате их сдвига вправо на две (для первой и четвертой строки) и четыре позиции (для второй и пятой строк).

Поскольку матрице F_2 соответствует простое число $n_2=3$, то это означает, что каждая строчка, и каждый столбец матрицы шестого порядка F_2 должны содержать по три значащих элемента. Как следует из формы верхней строки матрицы (1.52), для того чтобы образовать базисную функцию нулевого порядка системы $E_6^{(1)}$, первым двум строчкам матрицы F_2 следует придать форму

$$\begin{matrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 & - & 0 \end{bmatrix}, \\ 1 & \end{matrix} \quad (1.53)$$

В самом деле, умножая нулевую строку матрицы (1.52) последовательно на столбцы матрицы (1.53), получим требуемую нулевую базисную функцию системы $E_6^{(1)}$ в (1.48).

Первая строка матрицы (1.52), которая имеет вид $(- - 0 1 - -)$, может сформировать базисную функцию первого порядка системы $E_6^{(1)}$ только лишь в

результате ее умножения на столбцы второй и третьей строк матрицы F_2 , поскольку лишь второй и третий элементы первой строки матрицы (1.52) являются значащими. Легко убедиться в том, что эти строки (вторую и третью) матрицы F_2 следует выбрать такими:

$$\begin{matrix} 2 & \begin{bmatrix} 0 & - & 2 & - & 4 & - \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} - & 0 & - & 2 & - & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.54)$$

И, наконец, для образования базисной функции второго порядка системы $E_6^{(1)}$, расположенной во второй строке матрицы (1.48), достаточно умножить вторую строчку матрицы (1.52), т. е. строчку $(- \ - \ - \ - \ 0 \ 2)$, на четвертую и пятую строки матрицы F_2 , которые должны иметь вид:

$$\begin{matrix} 4 & \begin{bmatrix} 0 & - & 4 & - & 2 & - \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} - & 0 & - & 4 & - & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.55)$$

Объединяя матрицы (1.53)–(1.55), получим матрицу

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - & 0 & - \\ - & 0 & - & 0 & - & 0 \\ 0 & - & 2 & - & 4 & - \\ - & 0 & - & 2 & - & 4 \\ 0 & - & 4 & - & 2 & - \\ - & 0 & - & 4 & - & 2 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Как легко проверить, произведение матриц (1.52) и (1.56) по модулю $N=6$ приводит к матрице (1.48). Тем самым подтверждается, что и второй вариант факторизации системы $E_6^{(1)}$ выполнен правильно.

Приобретенный опыт факторизации матриц ДЭФ четвертого и шестого порядков можно перенести на решение задач факторизации матриц восьмого и более высоких порядков. Сформулируем основные эмпирические правила факторизации матриц ДЭФ произвольного порядка на примере матрицы восьмого порядка в изоморфном отображении:

$$E_8^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

ЭТАП 1. *Отобразим составное число N , определяющее порядок матрицы ДЭФ, в виде произведения простых чисел n_i , расположив их слева направо в порядке возрастания индексов i*

$$N = n_1 n_2 \dots n_k,$$

где k – число сомножителей.

Для восьмого порядка матрицы имеем $n_1 = n_2 = n_3 = 2$.

ЭТАП 2. *Представим порядок матрицы N в виде произведения*

$$N = n \cdot n_k, \quad (1.58)$$

где $n = n_1 n_2 \dots n_{k-1}$.

Формат (1.58) дает возможность выполнить первую ступень факторизации матрицы $E_8^{(1)}$. С этой целью согласно соотношению (1.58) запишем число 8 в виде произведения сомножителей 4 и 2. Числу 4 отвечает частично факторизованная матрица, которую обозначим F , а числу 2 – факторизованная матрица, которую обозначим как F_3 . Произведение матриц F и F_3 должно быть равно матрице (1.57), т. е.

$$E_8^{(1)} = F F_3.$$

Поскольку матрице F в формуле (1.58) отвечает число $n=4$, то это означает, что в каждой строчке матрицы необходимо записать последовательно четыре первых значащих элемента соответствующих базисных функций системы (1.57), причем нечетные строки следует сместить на четыре позиции вправо, а освободившиеся элементы заполнить прочерками. Указанный сдвиг нечетных строк необходимо сделать для того, чтобы в каждом столбце матрицы F осталось по четыре значащих элемента (как и в строках матрицы F). После выполнения указанных операций приходим к матрице

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Относительно матриц F , F_3 и $E_8^{(1)}$ можно предварительно высказать следующие соображения. Во-первых, поскольку матрице F_3 соответствует множитель $n_3 = 2$, то это означает, что все строки и столбцы матрицы содержат по два значащих элемента, причем эти элементы должны быть *диагонально расставленными*. Во-вторых, так как в верхней строчке матрицы F значащими являются первые четыре элемента, то в формировании нулевой базисной функции должны быть задействованы первые четыре строки матрицы F_3 , форма которых однозначно определяется соотношением

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

И, наконец, в-третьих, базисная функция первого порядка системы $E_8^{(1)}$ может быть образована в результате умножения первой строки матрицы (1.59) на столбец матрицы, составленной из четырех последних строк матрицы F_3 .

Эти строки должны выглядеть так

$$\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 4 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 4 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 4 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.61)$$

Объединение строк матриц (1.60) и (1.61) образует диагонально-факторизованную матрицу

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & 4 & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & 4 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 4 & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Легко проверить, что произведение матриц (1.59) и (1.62) приводит к матрице (1.57), как и должно быть. Напомним, что произведение двух элементов факторизуемых матриц ДЭФ, представленных их изоморфными отображениями (т. е. в виде показателей степени фазового множителя W) сводится к суммированию значений элементов по модулю N , равному порядку матрицы ДЭФ.

ЭТАП 3. Поскольку матрице F соответствует множитель $n=4$, являющийся составным числом, то его можно представить в виде сомножителей

$$n = n_1 n_2,$$

причем $n_1 = n_2 = 2$.

Следовательно, матрица F может быть подвергнута более глубокой факторизации и записана в виде произведения

$$F = F_1 F_2,$$

в котором F_1 – строчно-факторизованная матрица, а F_2 – диагонально-факторизованная матрица. Каждая строка и каждый столбец матриц восьмого порядка F_1 и F_2 содержат по два значащих элемента (так как им отвечают простые сомножители, равные двум).

Составим матрицу F_1 , формируя ее из элементов строк матрицы $E_8^{(1)}$, заданной системой (1.57), или матрицы F , представленной соотношением (1.59), таким образом. Из значащих элементов строк матриц $E_8^{(1)}$ (или F) в матрице F_1 сохраним лишь первые два элемента, смещая оставшиеся вправо на две позиции относительно положения значащих элементов предыдущей строки. В результате приходим к матрице

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 1 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 2 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 \\ 0 & 4 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 5 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 6 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 7 \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Это не единственный вариант представления строчно-факторизованной матрицы F_1 . Например, можно предложить еще такой вариант

$$F_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 1 & - & - \\ - & - & 0 & 2 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 \\ 0 & 4 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 5 & - & - \\ - & - & 0 & 6 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

И так далее.

Примем версию (1.63) как более регулярную. Матрицу F_2 следует конструировать таким образом, чтобы произведение матриц F_1 и F_2 оказалось равным матрице F . Легко проверить, что такой является матрица

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & - & 0 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & 2 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & 2 \\ 0 & - & 4 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 4 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & 6 \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

В каждой строке и каждом столбце матриц (1.63) и (1.64) содержится по два значащих элемента, а их произведение равно матрице (1.59), что и завершает процедуру факторизации системы $E_8^{(1)}$.

Рассмотрим схему факторизации изоморфной матрицы ДЭФ нечетного девятого порядка:

$$E_9^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

В соответствии с изложенной выше методикой факторизация матрицы ДЭФ девятого порядка сводится к составлению двух разреженных матриц, отвечающих сомножителям составного числа 9, равным $n_1=3$ и $n_2=3$. Матрица F_1 является строчно-факторизованной, т. е.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 1 & 2 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 4 & 8 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 7 & 5 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (1.66)$$

Диагонально-факторизованная матрица F_2 имеет вид:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - \\ - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 3 & - & - & 6 & - & - \\ - & 0 & - & - & 3 & - & - & 6 & - \\ - & - & 0 & - & - & 3 & - & - & 6 \\ 0 & - & - & 6 & - & - & 3 & - & - \\ - & 0 & - & - & 6 & - & - & 3 & - \\ - & - & 0 & - & - & 6 & - & - & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.67)$$

Произведение матриц (1.66) и (1.67) по модулю $m=9$ приводит к системе (1.65), как и должно быть. Таким образом,

если порядок матрицы ДЭФ является составным числом, содержащим k сомножителей (простых чисел), то она может быть представлена произведением одной строчно-факторизованной и $(k-1)$ -й диагонально-факторизованными матрицами.

На основе анализа результатов рандомизации матриц ДЭФ в пространстве изоморфного отображения, представленных соотношениями (1.42)-(1.67), сформулируем алгоритм (в форме последовательности этапов вычислений) рандомизации матриц, порядок которых N , для примера, составлен из произведения трех простых чисел

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3.$$

Пусть, для определенности, $n_1 = n_3 = 2$, а $n_2 = 3$, т. е.

$$N = 12 = 2 \cdot 3 \cdot 2.$$

Следовательно, исходную матрицу ДЭФ 12-го порядка E_{12} надлежит представить в виде произведения двух $F_{12,3}^{(d)}$ и $F_{12,2}^{(d)}$ диагонально-факторизованных матриц и одной строчно-факторизованной матрицы $F_{12,2}^{(s)}$, полагая $E_{12} = F_{12,2}^{(s)} \cdot F_{12,3}^{(d)} \cdot F_{12,2}^{(d)}$, где индексы s и d определяют строчно- и диагонально-факторизованные матрицы соответственно.

В качестве исходной матрицы ДЭФ выберем материнскую 12-го порядка матрицу, которая имеет вид

$$E_{12}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 & 6 & 9 & \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 4 & 8 & 0 & 4 & 8 & 0 & 4 & 8 & \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 8 & 1 & 6 & 11 & 4 & 9 & 2 & 7 & \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & \\ 0 & 7 & 2 & 9 & 4 & 11 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 5 & \\ 0 & 8 & 4 & 0 & 8 & 4 & 0 & 8 & 4 & 0 & 8 & 4 & \\ 0 & 9 & 6 & 3 & 0 & 9 & 6 & 3 & 0 & 9 & 6 & 3 & \\ 0 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & \\ 0 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \end{array} \right] \end{matrix} .$$

ЭТАП 1. Представим порядок матрицы N в виде произведения

$$N = n \cdot n_3,$$

где $n = n_1 \cdot n_2 = 6$ и $n_3 = 2$.

Следовательно, матрица $F_{12,6}^{(s)} = F_{12,6}^{(s)} \cdot F_{12,2}^{(d)}$ должна включать строчно-факторизованную матрицу

$$F_{12,6}^{(s)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 & \\ 0 & 4 & 8 & 0 & 4 & 8 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 5 & 10 & 3 & 8 & 1 & \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & 0 & 6 & 0 & 6 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 7 & 2 & 9 & 4 & 11 & \\ 0 & 8 & 4 & 0 & 8 & 4 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 6 & 9 & 6 & 3 & 0 & 9 & \\ 0 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & - & - & - & - & - & - & \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & \end{array} \right] ,$$

в каждой строке и каждом столбце которой содержится по шесть элементов левой половины матрицы $E_{12}^{(1)}$, причем нечетные строки образуемой матрицы должны быть сдвинуты на шесть разрядов вправо.

Диагонально-факторизованная матрица $F_{12,2}^{(d)}$ составляется из выделенных жирным шрифтом элементов матрицы $F_{12,6}^{(s)}$, причем как в строках, так и столбцах цифровые элементы берутся с прореживанием, равным шести. Имеем

$$F_{12,2}^{(d)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & 6 & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & - & - & - & - & 6 & - & - & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & - & - & 6 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 6 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 6 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & 6 \end{array} \right] \end{matrix}.$$

Этап 2. Матрицу $F_{12,6}^{(s)}$ также представим в виде $F_{12,6}^{(s)} = F_{12,2}^{(s)} \cdot F_{12,3}^{(d)}$, причем

$$F_{12,2}^{(s)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 2 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 4 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 5 \\ 0 & 6 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & 0 & 7 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 8 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 9 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 10 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 11 \end{array} \right] \end{matrix}.$$

Диагонально-факторизованная матрица $F_{12,3}^{(d)}$, во-первых, должна содержать (по определению) по три цифровых элемента в каждой строке и каждом столбце. И, во-вторых, все нечетные пары строк надлежит сместить на левую половину матрицы. В результате получим

$$F_{12,3}^{(d)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & - & 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & - & 2 & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & 2 & - & 4 & - \\ 0 & - & 4 & - & 8 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 4 & - & 8 & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & - & 6 & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & 6 & - & 0 & - \\ 0 & - & 8 & - & 4 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & 0 & - & 8 & - & 4 & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & - & 10 & - & 8 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & 10 & - & 8 & - \end{array} \right] \end{matrix} .$$

Легко убедиться в том, что произведение всех трех факторизованных матриц по модулю 12 совпадает с матрицей $E_{12}^{(1)}$, как и должно быть.

1.6. Быстрое преобразование Фурье в базисах ДЭФ

1.6.1. Общие соотношения

Пусть для обработки предьявляется некоторая выборочная совокупность дискретных отсчетов $\{\dot{x}(t)\}$, $t = \overline{0, N-1}$, где t – номер выборочного отсчета (нормированное дискретное время) непрерывного в общем случае комплексного сигнала $\dot{x}(\tau)$; N – объем выборки. Совокупности дискретных отсчетов $\{\dot{x}(t)\}$ ставится в соответствие комплексный спектр сигнала

$$\dot{X}(k) = \sum_{t=0}^{N-1} \dot{x}(t) \Psi^{tk}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (1.68)$$

где k – номер гармоники спектра, а $\Psi = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – фазовый (поворачивающий) множитель.

Систему алгебраических уравнений (1.68) можно записать в матричной форме

$$\dot{X}_N = E_N \dot{x}_N, \quad (1.69)$$

в которой \dot{x}_N и X_N есть N -мерные вектор-столбцы входного дискретного сигнала и его спектра соответственно, а E_N – квадратная матрица ДПФ N -го порядка в базисе ДЭФ.

Полагая $N = 4$, раскроем матрицу преобразования

$$E_4 = \begin{bmatrix} \psi^0 & \psi^0 & \psi^0 & \psi^0 \\ \psi^0 & \psi^1 & \psi^2 & \psi^3 \\ \psi^0 & \psi^2 & \psi^4 & \psi^6 \\ \psi^0 & \psi^3 & \psi^6 & \psi^9 \end{bmatrix}. \quad (1.70)$$

Отобразим компоненты матрицы (1.70) на комплексной плоскости (рис. 1.12).

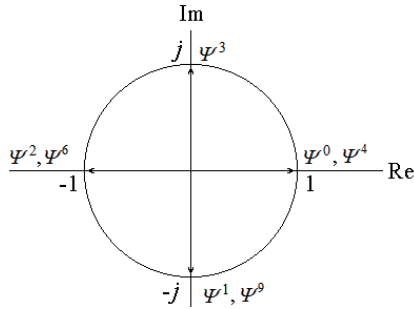


Рисунок 1.12. Распределение степеней фазового множителя W системы E_4

Выпишем развернутую систему уравнений, соответствующую матричной форме (1.69)

$$\begin{aligned} \dot{X}(0) &= \dot{x}(0) \psi^0 + \dot{x}(1) \psi^0 + \dot{x}(2) \psi^0 + \dot{x}(3) \psi^0; \\ \dot{X}(1) &= \dot{x}(0) \psi^0 + \dot{x}(1) \psi^1 + \dot{x}(2) \psi^2 + \dot{x}(3) \psi^3; \\ \dot{X}(2) &= \dot{x}(0) \psi^0 + \dot{x}(1) \psi^2 + \dot{x}(2) \psi^4 + \dot{x}(3) \psi^6; \\ \dot{X}(3) &= \dot{x}(0) \psi^0 + \dot{x}(1) \psi^3 + \dot{x}(2) \psi^6 + \dot{x}(3) \psi^9. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Опираясь на свойство периодичности фазовых множителей ДЭФ и, принимая во внимание, что для $N=4$ (рис. 1.12) имеем $\Psi^2 = -\Psi^0$, а $\Psi^3 = -\Psi^1$, представим матрицу E_4 с минимальными фазами

$$E_4 = \begin{bmatrix} \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 & \Psi^0 \\ \Psi^0 & \Psi^1 & -\Psi^0 & -\Psi^1 \\ \Psi^0 & -\Psi^0 & \Psi^0 & -\Psi^0 \\ \Psi^0 & -\Psi^1 & -\Psi^0 & \Psi^1 \end{bmatrix}.$$

Матрице E_4 отвечает система уравнений, определяющих спектр сигнала

$$\begin{aligned} \dot{X}(0) &= \dot{x}(0) \Psi^0 + \dot{x}(1) \Psi^0 + \dot{x}(2) \Psi^0 + \dot{x}(3) \Psi^0; \\ \dot{X}(1) &= \dot{x}(0) \Psi^0 + \dot{x}(1) \Psi^1 - \dot{x}(2) \Psi^0 - \dot{x}(3) \Psi^1; \\ \dot{X}(2) &= \dot{x}(0) \Psi^0 - \dot{x}(1) \Psi^0 + \dot{x}(2) \Psi^0 - \dot{x}(3) \Psi^0; \\ \dot{X}(3) &= \dot{x}(0) \Psi^0 - \dot{x}(1) \Psi^1 - \dot{x}(2) \Psi^0 + \dot{x}(3) \Psi^1. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Из сопоставления систем уравнений (1.71) и (1.72) можем убедиться в том, что матрица преобразования E_4 с минимальными фазами обеспечивает существенное сокращение объема вычислений ДПФ. В самом деле, анализируя столбцы в правой части системы уравнений (1.72), видим, что их компоненты совпадают, или отличаются лишь знаками. Отмеченную особенность, которую доставляет матрица ДЭФ с минимальными фазами, можно использовать для повышения скорости выполнения ДПФ (за счет сокращения объема вычислений) и тем самым прийти к так называемым алгоритмам *быстрого преобразования Фурье* (БПФ).

1.6.2. Алгоритмы БПФ с основанием 2

Как уже отмечалось ранее, в основе быстрого преобразования Фурье лежит процедура факторизации матриц ДПФ [10, 25, 26, 29, 33, 35-39, 42]. Максимальную глубину факторизации можно провести для матриц, порядок которых является степенью числа 2. Именно с таких порядков и начнем знакомство с техникой построения алгоритмов БПФ.

Итак, положим $N=4$, что соответствует системам ДЭФ с основанием системы счисления $m=4$. Согласно выражению (1.43), представим матрицу E_4 в виде произведения

$$E_4 = F_1 F_2,$$

в котором матрицы F_1 и F_2 заданы соотношениями (1.44) и (1.47) соответственно.

Переходя от изоморфного отображения в пространство оригиналов и учитывая, что

$$\Psi^0 = 1; \quad \Psi^1 = -j; \quad \Psi^2 = -1; \quad \Psi^3 = j, \quad (1.73)$$

из соотношений (1.47) и (1.73) получим

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & - \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & - \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

Умножим справа матрицу (1.74) на вектор-столбец входных сигналов $\mathbf{x} = \{x_t\}$, $t = 0, \overline{3}$, размещая нулевой отсчет сигнала сверху столбца,

$$\mathbf{y}_1 = F_2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & - \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & - \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_0 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Для вычисления компонент вектор-столбца в правой части выражения (1.75) воспользуемся известным оператором типа “бабочка” (рис. 1.13).

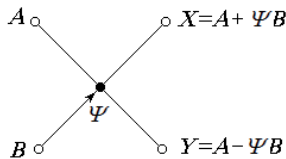


Рисунок 1.13. Отображение оператора “бабочка”

Преобразование (1.75) может быть реализовано с помощью двух операторов “бабочка” по схеме, показанной на рис. 1.14.

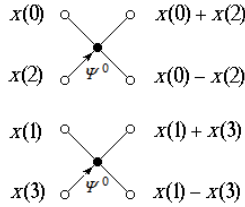


Рисунок 1.14. Первая ступень преобразования

Обратим внимание на то, что отсчеты сигналов на входе первой ступени преобразования (рис. 1.14) расставлены в порядке двоично-инверсной перестановки (ДИП) исходной (естественной) последовательности. Это сделано для того, чтобы обеспечить формирование компонент правого вектор-столбца в соотношении (1.75).

Переходим ко второй ступени ДПФ. На этом этапе для $N=4$ формируется спектр

$$\dot{X}_4 = F_1 y_1, \quad (1.76)$$

где y_1 есть вектор-столбец преобразования (1.75).

Матрицу F_1 получим, обращая матрицу (1.44) из пространства изоморфного отображения в пространство оригиналов,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & j \\ 1 & -1 & - & - \\ - & - & 1 & -j \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что выполнив матричное умножение (1.76), приходим к системе ДПФ (1.72). Отметим, что *процедура вычисления спектра на основе факторизованных матриц ДЭФ требует выполнения меньшего числа преобразований по сравнению с классическим вариантом ДПФ.*

Для подтверждения данного утверждения обратимся к анализу дерева четырехточечного БПФ в базисе ДЭФ (рис. 1.15). Цифрами на входе первого слоя операторов “бабочка” обозначены (в круглых скобках) номера отсчетов t дискретного сигнала $x(t)$. Придерживаясь правила преобразования в операторах “бабочка”, показанных на рис. 1.13, и, принимая во внимание равенства (1.73), приходим к тому, что формируемые деревом

четырёхточечного БПФ гармоники совпадают с гармониками, которые определяются по формулам ДПФ (1.72). При этом совершенно очевидно, что число операций умножения, которые выполняются в алгоритме БПФ, меньше, чем в прямом ДПФ.

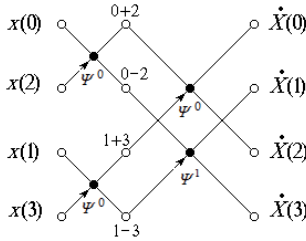


Рисунок 1.15. Дерево четырёхточечного БПФ в базисе ДЭФ

Основываясь на схеме четырёхточечного БПФ, представленного на рис. 1.15, а также исходя из структурных форм факторизованных матриц (1.62)–(1.64), приходим к дереву восьмиточечного БПФ, показанному на рис. 1.16.

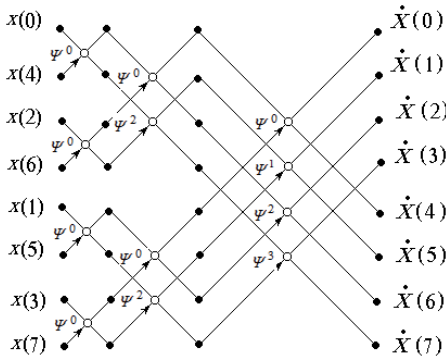


Рисунок 1.16. Дерево восьмиточечного БПФ в базисе ДЭФ

Обратим особое внимание на правило расстановки показателей степени ФМ, являющихся весовыми множителями ребер дерева БПФ. Пусть $N = 2^s$, где s – число ступеней преобразований в направленном графе БПФ. На самой последней s -й ступени преобразования используются $N/2$ весовых множителей Ψ с показателями степени k . Будучи расставленными сверху вниз

эти показатели образуют естественный ряд $k=0, 1, \dots, (N/2)-1$. На $(s-1)$ -й степени преобразования вычисляются два $N/2$ -точечных ДПФ, для каждого из которых применяются $N/4$ весовых множителя Ψ с показателями степени $2k$, причем $k=0, 1, \dots, (N/4)-1$. Для $(s-2)$ -й степени преобразования показателями степени весов ребер являются числа $4k$, где $k=0, 1, \dots, (N/8)-1$ и т. д.

Описанная схема формирования весовых множителей для интервала $N=16$ поясняется табл. 1.1.

**Таблица 1.1. Весовые множители ребер
дерева 16-точечного БПФ**

Номер этапа преобразования	Показатели степени весовых множителей ребер дерева БПФ
4	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3	0, 2, 4, 6
2	0, 4
1	0

Для примера рассмотрим алгоритм вычисления гармоники $\dot{X}(3)$ по восьмиточечному дереву БПФ (рис. 1.17). Квадратами и буквами отмечены узловые точки графа преобразования, которые участвуют в формировании гармоники $\dot{X}(3)$.

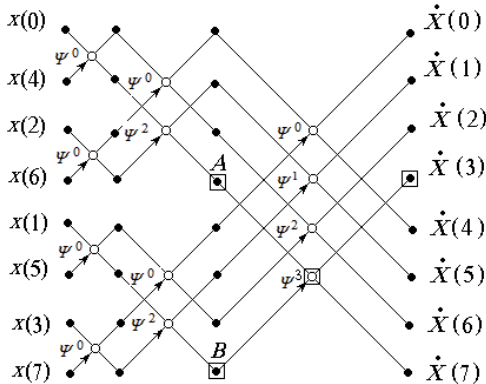


Рисунок 1.17. К вычислению гармоники $\dot{X}(3)$

Итак, в соответствии с деревом преобразования (рис. 1.17) можем записать

$$\dot{X}(3) = A + \Psi^3 B, \quad (1.77)$$

где для $N = 8$

$$\Psi^3 = e^{-j\frac{2\pi}{N}3} = e^{-j\frac{3\pi}{4}}. \quad (1.78)$$

В свою очередь,

$$A = x(0) - x(4) - \Psi^2(x(2) - x(6)); \quad (1.79)$$

$$B = x(1) - x(5) - \Psi^2(x(3) - x(7)), \quad (1.80)$$

причем

$$\Psi^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j. \quad (1.81)$$

Объединяя выражения (1.77)–(1.81), имеем:

$$\dot{X}(3) = x(0) - x(4) + jx(2) - jx(6) + \Psi^3 x(1) - \Psi^3 x(5) - \Psi^5(x(3) - x(7))$$

и, так как $W^5 = -W^1$, получим окончательно:

$$\dot{X}(3) = x(0) + \Psi^3 x(1) + jx(2) + \Psi^1 x(3) - x(4) - \Psi^3 x(5) - jx(6) - \Psi^1 x(7),$$

что совпадает с оценкой $\dot{X}(3)$, вычисляемой на основании классического ДПФ

$$\dot{X}(3) = \sum_{t=0}^7 x(t) \Psi^{3t}.$$

Кроме рассмотренного алгоритма БПФ с *прореживанием по времени* существуют и другие методы быстрого преобразования Фурье. В частности, широко известным является алгоритм БПФ с *прореживанием по частоте*. Относительно последнего метода БПФ допустимо считать, что он является избыточным, поскольку спектр сигнала в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте может быть получен в рамках алгоритма БПФ с прореживанием по времени в результате соответствующей перестановки отсчетов входного сигнала.

1.6.3. Алгоритмы БПФ с основанием p

Влияние интервала N на объем вычислений в алгоритмах БПФ достаточно хорошо поясняется в [40], поэтому остановимся далее только на качественной стороне вопроса.

БПФ осуществимо лишь в том случае, если порядок N квадратной матрицы ДПФ можно разложить на простые множители и тем самым

факторизовать матрицу ДПФ. Количество образующихся при этом матриц-сомножителей определяется числом простых множителей, на которые раскладывается число N . Чем их больше, тем проще структура матриц-сомножителей и тем меньше объем вычислений БПФ. При этом одновременно увеличивается и количество матриц-сомножителей, что приводит к некоторому увеличению объема вычислений. Исходя из таких противоречивых факторов, можно прийти к заключению, что наиболее выгодным (как указывается в [40]) является интервал N , равный 3^n .

Далее на примере $N = 3^n$ будут даны общие рекомендации относительно построения алгоритма БПФ дискретного сигнала, объем выборки которого составляет p^n , где p – простое число, не равное двум, а n – натуральное число. Класс таких алгоритмов и будем называть алгоритмами БПФ с p -основанием p .

Итак, попытаемся найти закономерности построения дерева и базовых операторов БПФ с основанием $p = 3$. Если $n = 1$, т. е. $N = 3$, то базовый оператор (матрица преобразования $M_{3,0}$) трехточечного БПФ совпадает с трехточечным оператором ДПФ (поскольку 3 – простое число) и имеет вид

$$M_{3,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

Дерево БПФ, отвечающее оператору (1.82), показано на рис. 1.18.

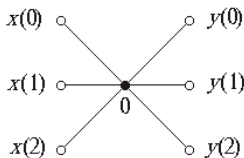


Рисунок 1.18. Базовая операция трехточечного БПФ

Вектор y (спектр), образующийся в результате умножения вектора x (сигнала) на матрицу преобразования в пространстве изоморфного отображения (1.82), представим компонентами

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) \cdot 0 + x(1) \cdot 0 + x(2) \cdot 0; \\ y(1) &= x(0) \cdot 0 + x(1) \cdot 1 + x(2) \cdot 2; \\ y(2) &= x(0) \cdot 0 + x(1) \cdot 2 + x(2) \cdot 1. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Правые цифровые множители в произведениях системы (1.83), являясь элементами матрицы $M_{3,0}$, равны значениям показателя степени фазового множителя Ψ трехточечного ДПФ, причем

$$\Psi = e^{-j\frac{2\pi}{3}}.$$

Переходя в системе (1.83) от изоморфного отображения фазового множителя к обычной форме в пространстве оригиналов, получим

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) + x(1) + x(2); \\ y(1) &= x(0) + x(1) \cdot \Psi + x(2) \cdot \Psi^2; \\ y(2) &= x(0) + x(1) \cdot \Psi^2 + x(2) \cdot \Psi. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Тривиальный множитель $\Psi^0 = 1$ в системе уравнений (1.84) опущен. Таким образом, ни одна из операций умножения или сложения в (1.84) не является избыточной и поэтому оператор трехточечного БПФ совпадает с оператором трехточечного ДПФ.

Обратимся к анализу девятиточечного БПФ, для которого $N = 3^2$. Степень 2 при основании 3 указывает на то, что БПФ выполняется за два этапа, каждому из которых соответствует своя часть графа БПФ. Первая (левая) часть дерева БПФ содержит группу из трех одинаковых по структуре операторов преобразования (рис. 1.18), но различающихся номерами отсчетов дискретного сигнала $x(t)$, подаваемых на входы операторов. Важно установить правило распределения номеров отсчетов входного сигнала по отдельным операторам преобразования. Это правило предопределено диагонально-факторизованной матрицей (1.67). Обозначим через $(1, i)$, $i = \overline{0, 2}$, номер оператора преобразования первой группы. Верхнему оператору приписывается значение $i = 0$. Тогда, как это следует из структуры матрицы (1.67), на верхние входы i -го оператора первой группы преобразования подводятся i -е отсчеты $x(i)$ сигнала, а на последующие входы – сигналы с прореживанием по 3, что отображается табл. 1.2.

Таблица 1.2. Совокупность отсчетов сигналов, подаваемых на входы процессора БПФ

Номер оператора	Номер входа оператора		
	0	1	2
0	$x(0)$	$x(3)$	$x(6)$
1	$x(1)$	$x(4)$	$x(7)$
2	$x(2)$	$x(5)$	$x(8)$

Непосредственно из строчно-факторизованной матрицы (1.66) получим матрицу преобразования $M_{9,0}$ на первом этапе БПФ

$$M_{9,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.85)$$

Из сопоставления матриц (1.82) и (1.85) следует, что

$$M_{9,0} = M_{3,0} \cdot 3,$$

то есть элементы матрицы $M_{9,0}$ в (1.85) образуются из соответствующих элементов матрицы $M_{3,0}$, представленной соотношением (1.82), в результате их умножения на 3.

Полученный результат легко обобщается на произвольную n -ю степень тройки. В частности, если объем выборки $N = 3^n$, то

$$M_{N,0} = M_{3,0} \cdot 3^{n-1}.$$

В более общем случае, когда $N = m^n$, где m – произвольное простое число (не равное двум)

$$M_{N,0} = M_{m,0} \cdot m^{n-1}.$$

Операторы преобразования (и соответствующие им матрицы) зависят от значений p и степени n . Если $p = 3$ и $n = 2$, то вторая группа операторов включает операторы (матрицы) $M_{9,0}$, $M_{9,1}$ и $M_{9,2}$, соответствующие второму (правому) этапу преобразования (второй части графа БПФ). Все три матрицы преобразования $M_{9,i}$, $i = \overline{0, 2}$, содержатся в строчно-факторизованной матрице (1.66).

С целью установления правила формирования матриц $M_{9,1}$ и $M_{9,2}$ выпишем их первоначально из матрицы (1.66). Имеем

$$M_{9,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{и} \quad M_{9,2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что элементы верхних строк матриц $M_{9,i}$, $i = 0, 1, 2$, являются первыми тремя элементами базисной функции i -го порядка системы $E_9^{(1)}$, заданной соотношением (1.65). Остальные строки

матриц $M_{9,i}$ берутся из первых трех колонок матрицы (1.65) с построчным прореживанием по 3. Это означает, что матрица $M_{9,1}$ набирается из элементов базисных функций системы $E_9^{(1)}$, порядки которых составляют величины 1, 4 и 7, тогда как для матрицы $M_{9,2}$ порядки базисных функций равны 2, 5 и 8.

Структурная схема БПФ (рис. 1.19) включает два этапа преобразования, каждый из которых содержит по три оператора базового трехточечного ДПФ.

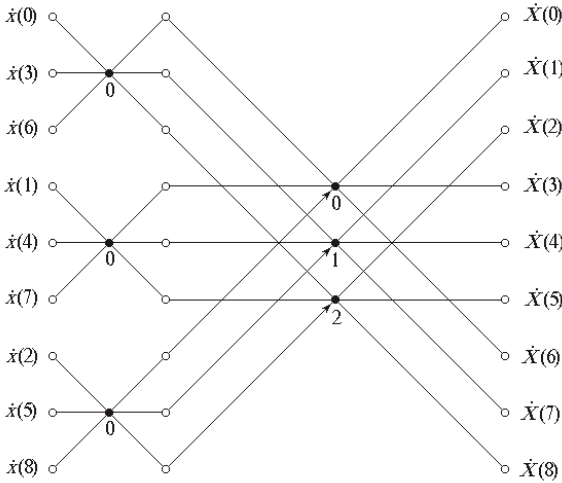


Рисунок 1.19. Дерево девятиточечного алгоритма БПФ

Проиллюстрируем правило формирования матриц преобразования $M_{N,i}$ третьей ступени дерева БПФ при $N = 3^3$. В табл. 1.3 сведены значения первых трех элементов базисных функций $e(k,t)$, $k = 0, \overline{26}$, $t = 0, 1, 2$, системы E_{27} .

Таблица 1.3. Базисные функции операторов $M_{N,i}$

k	$e(k,t)$			k	$e(k,t)$			k	$e(k,t)$		
0	0	0	0	9	0	9	18	18	0	18	9
1	0	1	2	10	0	10	20	19	0	19	11
2	0	2	4	11	0	11	22	20	0	20	13
3	0	3	6	12	0	12	24	21	0	21	15
4	0	4	8	13	0	13	26	22	0	22	17
5	0	5	10	14	0	14	1	23	0	23	19

Продолжение табл. 1.3

k	$e(k,t)$		k	$e(k,t)$		k	$e(k,t)$				
6	0	6	12	15	0	15	3	24	0	24	21
7	0	7	14	16	0	16	5	25	0	25	23
8	0	8	16	17	0	17	7	26	0	26	25

Выбирая в качестве верхней (первой) первой строки матрицы $\mathbf{M}_{27,k}$ k -ю функцию из табл. 1.3, а вторую и третью – с прореживанием по 9, получим

$$\mathbf{M}_{27,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 18 & 9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{27,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 19 & 11 \end{bmatrix}; \quad (1.86)$$

$$\mathbf{M}_{27,2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 20 & 13 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{27,3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 24 \\ 0 & 21 & 15 \end{bmatrix};$$

и так далее.

Из анализа системы операторов (матриц), частично представленных системой (1.86), приходим к такому заключению. Во-первых, все элементы левых столбцов матриц $\mathbf{M}_{27,k}$ (назовем их первыми столбцами) равны нулю. Во-вторых, три элемента вторых и третьих столбцов (обозначим которые $f_{j,2}^{(i,k)}$) определяются выражениями

$$f_{j,2}^{(i,k)} = (j \cdot (k + i \cdot 9))_{27}; \quad i = \overline{0, 2}; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{0, 8},$$

где i – номер элемента (нумерация сверху вниз) среднего ($j=1$) или правого ($j=2$) столбцов, а k есть индекс матрицы $\mathbf{M}_{27,k}$.

Для $N = 3^n$ интервал прореживания составляет величину, равную 3^{n-1} , а k -я матрица преобразования третьего порядка определяется соотношением

$$\mathbf{M}_{N,k} = \begin{bmatrix} 0 & k & 2k \\ 0 & k + 3^{n-1} & (2(k + 3^{n-1}))_N \\ 0 & k + 2 \cdot 3^{n-1} & (2(k + 2 \cdot 3^{n-1}))_N \end{bmatrix}, \quad (1.87)$$

причем $k = \overline{0, 3^{n-1} - 1}$.

Систему (1.87) легко можно обобщить на случай произвольного основания $N = p^n$, в котором p – любое не равное двум простое число. Для этих целей воспользуемся обобщенным изоморфным отображением (1.28) матрицы ДЭФ N -го порядка, согласно которому

$$E_N = \{e(k, t)\} = \{(kt)_N\},$$

где $k, t = \overline{0, N-1}$.

Итак, пусть заданы p – простое число и s – число ступеней алгоритма БПФ. Основу дерева s -ступенчатого БПФ составляют операторы ДПФ $F_k^{(n)}$, $k = \overline{0, p^{s-1}}$, p -го порядка. Интервал прореживания входных сигналов равен p . Это означает, что если на первый (верхний) вход i -го оператора ДПФ первой ступени подается $x(i)$ -й дискретный отсчет сигнала, то на второй, третий и т. д. входы подаются $x(i+p)$ -й, $x(i+2p)$ -й и другие дискретные отсчеты. Все операторы ДПФ первого эшелона (этапа) БПФ одинаковы и матрицу их преобразования p -го порядка $M_{N,0}$ зададим в виде

$$M_{N,0} = \{f_{ij}^{(0)}\}, \quad i, j = \overline{0, p-1}.$$

Элементы $f_{ij}^{(0)}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, вычисляются по формуле

$$f_{ij}^{(0)} = (i p j)_N. \quad (1.88)$$

Пусть, для примера, $p = 5$, $s = 2$ и, следовательно, $N = 25$. Тогда

$$M_{25,0} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ i \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 10 & 20 & 5 & 15 \\ 0 & 15 & 5 & 20 & 10 \\ 0 & 20 & 15 & 10 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Элементы $f_{ij}^{(k)}$ матриц $M_{N,k}$, $k = \overline{1, 4}$, определяются выражением

$$f_{ij}^{(k)} = ((k + i p) j)_N. \quad (1.89)$$

Естественно, что соотношение (1.88) является частным случаем формулы (1.89), воспользовавшись которой получим для рассматриваемого примера

$$\begin{aligned}
 M_{25,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 \\ 0 & 11 & 22 & 8 & 19 \\ 0 & 16 & 7 & 23 & 14 \\ 0 & 21 & 17 & 13 & 9 \end{bmatrix}; & M_{25,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 14 & 21 & 3 \\ 0 & 12 & 24 & 11 & 23 \\ 0 & 17 & 9 & 1 & 18 \\ 0 & 22 & 19 & 16 & 13 \end{bmatrix}; \\
 M_{25,3} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 24 & 7 \\ 0 & 13 & 1 & 14 & 2 \\ 0 & 18 & 11 & 4 & 22 \\ 0 & 23 & 21 & 19 & 17 \end{bmatrix}; & M_{25,4} &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & 9 & 18 & 2 & 11 \\ 0 & 14 & 3 & 17 & 6 \\ 0 & 19 & 13 & 7 & 1 \\ 0 & 24 & 23 & 22 & 21 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для числа ступеней s больше двух на последнем этапе преобразования используются все p^{s-1} базовых операторов ДПФ $M_{N,k}$, $k=0, \overline{p^{s-1}}$. На $(s-1)$ -й ступени преобразований число различных используемых операторов понижается в p раз и они отбираются из полной совокупности операторов, начиная с оператора $M_{N,0}$, по методу p -прореживания. Для иллюстрации в табл. 1.4 приведено правило отбора операторов преобразования для $p=3$ и $s=4$.

Таблица 1.4. Весовые множители ребер дерева 27-точечного БПФ

Номер ступени	Номер оператора преобразования																	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	0			3			6			9			12			15		
2	0									9								
1	0																	

Продолжение табл. 1.4

Номер ступени	Номер оператора преобразования									
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
4	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
3	18			21			24			
2	18									
1	0									

На каждой ступени преобразования общее число используемых операторов остается неизменным и равным p^{s-1} . На первом этапе БПФ все операторы преобразования одинаковы и закон преобразования задается матрицей $M_{N,0}$.

Аналогичным образом может быть составлено правило отбора операторов для произвольных параметров преобразования p и s .

1.6.4. Составные основания алгоритмов БПФ

Рассмотрим варианты построения алгоритмов БПФ для оснований N , являющихся составными числами, причем хотя бы одно простое число не равно 2. Рассмотрим, для примера, $N=6$. Пространственное распределение фазовых множителей шеститочечного ДПФ показано на рис. 1.20.

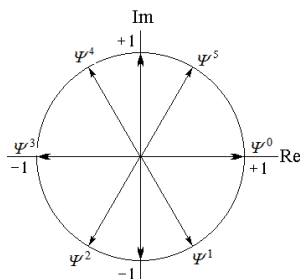


Рисунок 1.20. Фазовые множители шеститочечного ДПФ

Представим интервал N в виде произведения

$$N = n_1 \cdot n_2.$$

Двум вариантам значений сомножителей (в первом варианте $n_1=3$, $n_2=2$, а во втором $n_1=2$, $n_2=3$) соответствуют два варианта построения структурной схемы дерева шеститочечного БПФ в базе ДЭФ.

Рассмотрим первый вариант построения алгоритма шеститочечного БПФ. Спектр $\dot{X}_6 = \{\dot{X}(k)\}$, $k = \overline{0, 5}$, дискретного сигнала $\dot{x} = \{x(t)\}$, $t = \overline{0, 5}$, определяется выражением

$$\dot{X}_6 = F_1 F_2 \dot{x},$$

где F_1 и F_2 – факторизованные матрицы, заданные соотношениями (1.50) и (1.51) соответственно; \dot{x} – вектор-столбец входных сигналов, нулевой элемент

которого находится сверху столбца. Перемножив матрицу F_2 и вектор \dot{x} , получим столбец

$$y_1 = F_2 \dot{x},$$

который запишем в виде

$$\{y_1(k)\} = y_1 = 3 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ k \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix}. \quad (1.90)$$

Каждый элемент вектор-столбца (1.90) представляет собой сумму двух произведений, причем левая цифра соответствует номеру отсчета t сигнала $x(t)$, а правая цифра – значению элемента матрицы (1.51)

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & - & - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - & 0 & - \\ - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 3 & - & - \\ - & 0 & - & - & 3 & - \\ - & - & 0 & - & - & 3 \end{bmatrix},$$

на который умножается данный элемент. Таким образом, для примера,

$$\begin{aligned} y_1(0) &= x(0) \cdot \Psi^0 + x(3) \cdot \Psi^0; \\ y_1(3) &= x(0) \cdot \Psi^0 + x(3) \cdot \Psi^3. \end{aligned} \quad (1.91)$$

В системе (1.91) произведена замена изоморфного отображения фазового множителя $k = 0, 3$ на его истинное значение Ψ^k , где

$$\Psi = e^{-j\frac{2\pi}{6}} = e^{-j\frac{\pi}{3}}.$$

Поскольку $\Psi^0 \equiv 1$, а для $N=6$ (рис. 1.19) $\Psi^3 = -1$, то систему (1.91) можно записать в более компактной форме

$$y_1(0) = x(0) + x(3);$$

$$y_1(3) = x(0) - x(3),$$

которая реализуется базовым оператором БПФ (рис. 1.21).

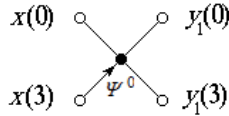


Рисунок 1.21. Базовая операция алгоритма двухточечного БПФ

Аналогичным преобразованиям подвергаются пары отсчетов сигнала $(x(1), x(4))$ и $(x(2), x(5))$. Таким образом, на входе дерева шеститочечного БПФ по первому варианту реализации алгоритма находятся три базовых оператора двухточечного ДПФ, на верхние входы которых подведены отсчеты сигнала $x(t)$, $t = 0, 1, 2$, а на вторые входы – отсчеты сигнала с прореживанием по три.

На втором (заключительном) этапе шеститочечного БПФ выполняется операция матричного умножения

$$F_1 y_1. \tag{1.92}$$

Структурная форма матрицы F_1 , заданной соотношением (1.50)

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

дает возможность привести операцию (1.92) к двум взаимно несвязанным операциям. Первая из них реализует умножение матрицы третьего порядка (обозначим ее $M_{6,0}$) на вектор-столбец $y_{1,0}$, компонентами которого являются четные элементы вектор-столбца y_1 , а вторая – умножение матрицы третьего порядка $M_{6,1}$ на вектор $y_{1,1}$, компонентами которого являются нечетные

элементы вектор-столбца y_1 . Матрицы $M_{6,0}$ и $M_{6,1}$ легко выделяются из матрицы (1.50) и имеют вид

$$M_{6,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1.93)$$

$$M_{6,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.94)$$

Пусть $M = [f_{ij}]$ – квадратная матрица третьего порядка. Введем граф трехточечного ДПФ (рис. 1.22).

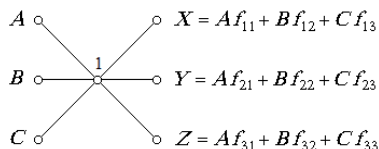


Рисунок 1.22. Базовая операция трехточечного ДПФ

Индекс l в операторе трехточечного ДПФ дает возможность вводить различные матрицы преобразования. В частности, если $l=0$, то M совпадает с матрицей (1.93), а если $l=1$, то с матрицей (1.94).

Проведенный анализ дает возможность составить структурную схему алгоритма шеститочечного БПФ (рис. 1.23).

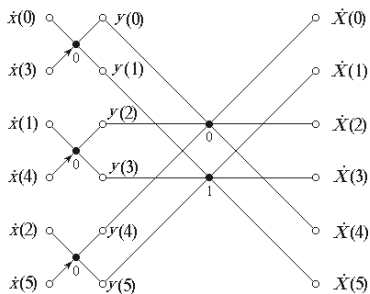


Рисунок 1.23. Дерево шеститочечного БПФ (вариант 1)

Показанный на рис. 1.23 граф содержит три колонки светлых точек (вершин). Первая колонка соответствует элементам входного вектора (сигнала) \dot{x} . Вторая колонка соответствует вектору y_1 , образуемому в результате умножения факторизованной матрицы F_2 на вектор \dot{x} . И, наконец, третья колонка определяет спектр \dot{X} сигнала \dot{x} в шеститочечном базисе ДЭФ.

Следуя изложенной методике, легко приходим к структурной схеме алгоритма шеститочечного БПФ (рис. 1.24) по второму варианту разложения числа 6 на сомножители $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$.

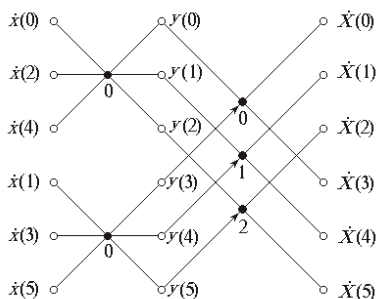


Рисунок 1.24. Дерево шеститочечного БПФ (вариант 2)

Как следует из рис. 1.24, на входе дерева БПФ находятся два оператора трехточечного ДПФ, матрицы преобразования которых $M_{6,0}$ одинаковы (о чем символизирует единый индекс 0) и определяются соотношением (1.92). Во вторую ступень дерева БПФ включены три базовых двухточечных операторов ДПФ с коэффициентами (весами ребер) $l = 0, 1, 2$. Эти коэффициенты суммируются по mod 6 с соответствующими коэффициентами (правыми множителями) компонентов входного сигнала, который подводится на нижний вход базового двухточечного ДПФ.

Для пояснения данной операции рассмотрим те составляющие гармоники $X(1)$, которые формируются компонентами пятого элемента вектора y_1 , то есть элемента

$$y(4) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4.$$

На выходе ребра, вес которого $l = 1$, образуется отклик (обозначим его $y'(4)$) такой, что

$$y'(4) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5. \quad (1.95)$$

В правой части выражения (1.95) левые сомножители по прежнему равны номеру отсчета t сигнала $x(t)$, а правые – значению соответствующего элемента матрицы преобразования (1.51) в пространстве изоморфного отображения.

Если перейдем к преобразованиям в пространстве оригиналов, то коэффициенты l в операторах двухточечных ДПФ будут означать вес ребра, равный W^l , на который по обычным правилам базовой операции выполняется умножение входного сигнала.

Следуя изложенной методике, можно успешно решать задачи синтеза алгоритмов БПФ в базисе ДЭФ для произвольных составных оснований.

1.7. Алгоритмы БПФ в дочерних базисах ДЭФ

Ниже рассматриваются возможности построения алгоритмов БПФ в базисах дочерних симметричных ДЭФ на примере систем ДЭФ девятого порядка.

Для $N=9$ всего существует шесть симметричных систем ДЭФ, причем $E_9^{(1)}$ является материнской системой, а $E_9^{(i)}$, $i = \overline{2, 6}$, – дочерними системами девятиточечной ДЭФ. Основная (материнская) система задана матрицей (1.65), а дерево БПФ в базисе $E_9^{(1)}$ представлено на рис. 1.19.

Возможны, по крайней мере, два варианта построения алгоритмов БПФ в дочерних базисах ДЭФ. Первый вариант основывается на факторизации матриц дочерних систем. Во втором варианте предполагается, что структура дерева и порядок следования базовых операторов ДПФ, из которых составляется дерево БПФ, остается неизменной, например, такой, как для базиса $E_9^{(1)}$, а преобразование в других базисах осуществляется за счет специально организованной перестановки отсчетов входного сигнала $x(t)$, $t = \overline{0, N-1}$.

Обратимся к первому варианту построения алгоритма БПФ для дочерних систем ДЭФ, выбрав в качестве таковой систему $E_9^{(2)}$.

$$E_9^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.97)$$

Строчно-факторизованная матрица, отвечающая матрице (1.97), строится точно так же, как и матрица F_1 , приведенная в (1.66), т. е. имеет вид:

$$F_{1,9}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 2 & 4 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 8 & 7 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 0 & 5 & 1 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}. \quad (1.98)$$

Диагонально-факторизованная матрица $F_{2,9}^{(2)}$ составляется таким образом, чтобы после умножения матрицы (1.98) справа на матрицу $F_{1,9}^{(2)}$ результат произведения оказался равным матрице $E_9^{(2)}$. Таким условиям удовлетворяет матрица F_2 системы (1.67) и, следовательно,

$$F_{2,9}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - \\ - & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - \\ - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 6 & - & - & 3 & - & - \\ - & 0 & - & - & 6 & - & - & 3 & - \\ - & - & 0 & - & - & 6 & - & - & 3 \\ 0 & - & - & 3 & - & - & 6 & - & - \\ - & 0 & - & - & 3 & - & - & 6 & - \\ - & - & 0 & - & - & 3 & - & - & 6 \end{bmatrix}.$$

Полный набор матриц-операторов ДПФ $M_{9,i}^{(2)}$, $i = \overline{0, 2}$, дерева девятиточечного БПФ в базисе дочерней системы ДЭФ $E_9^{(2)}$ (1.97) содержится в матрице (1.98), а именно

$$M_{9,0}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad M_{9,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{9,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Идея второго метода построения алгоритма БПФ во множестве базисных систем ДЭФ состоит в следующем. Пусть выбранная структура дерева БПФ отвечает некоторой l -й базисной системе ДЭФ N -го порядка. Пусть, кроме того, требуется выполнить преобразование входных сигналов в этом дереве таким образом, чтобы система преобразований оказалась эквивалентной преобразованию в другом k -м базисе.

Легко убедиться на конкретных примерах в том, что для решения поставленной задачи достаточно заменить номера отсчетов сигналов на входе процессора БПФ, которые они имеют в базисе $E_N^{(l)}$, на их произведение по модулю N на тот целый коэффициент c , которым базис $E_N^{(l)}$ связан с базисом $E_N^{(k)}$.

**С помощью цифр можно
доказать все что угодно**

Т. Карлейль



2. СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ УОЛША

Функциями Уолша называется полное семейство ортогональных функций, принимающих значения 1 и -1 на всей области определения [40]. Системы Уолша находят широкое применение в различных областях науки и техники. Функции Уолша используются при решении задач спектральной обработки сигналов, построении специализированных вычислительных устройств шифрования, кодирования и сжатия аудио- и видеоданных, в системах сотовой и космической связи и др. [27, 29, 33, 34, 40].

В разделе показаны возможности применения развитого в монографиях [5-9] аппарата обобщенных преобразований Грея для синтеза симметричных систем Уолша [14], а также обсуждаются вопросы вычисления спектров дискретных сигналов в различных базисах Уолша [10].

2.1. Общие сведения

Характерная особенность функций Уолша состоит в том, что, во-первых, они являются вещественными функциями. Во-вторых, функции Уолша принимают всего лишь два значения ($+1$ или -1) и поэтому удобны для цифровой обработки информации. И, в-третьих, дискретное преобразование в базисе функций Уолша экономно по объему вычислений и обеспечивает на

порядок большую скорость определения спектра сигнала по сравнению с базисом ДЭФ.

Из отмеченных достоинств функций Уолша вовсе не следует, что они могут повсеместно заменить базис ДЭФ. Укажем, по крайней мере, на следующие недостатки функций Уолша. Во-первых, поскольку функции Уолша принимают на интервале ортогональности значения ± 1 , базис Уолша зачастую оказывается малоприспособленным для фильтрации гармонических сигналов. Во-вторых, в алгоритмах обнаружения-измерения сигналов на фоне помех, например, в импульсно-доплеровских радиолокационных станциях, базис функций Уолша проигрывает по эффективности базису ДЭФ.

Сведенные вместе и пронумерованные функции Уолша разных порядков образуют систему. Число функций, включаемых в систему, обычно равно числу отсчетов каждой функции, так как при дискретном спектральном анализе сигналов с N отсчетами число спектральных составляющих (гармоник) также должно быть равно N . Число N называют *интервалом определения* функций Уолша, которое для *классических систем* задается значением, равным степени двойки $N = 2^n$, где n – натуральное число, т. е. $n = 1, 2, \dots$.

2.2. Классические системы функций Уолша

Поскольку нумерация (упорядочение) функций Уолша может быть произведена разными способами, то возможны и различные системы функций Уолша. Удобным способом представления таких систем является отображение их в виде квадратных матриц, в которых каждая строка – это функция Уолша, причем для простоты вместо значений элементов этих функций $+1$ и -1 записывают только их знаки $+$ или $-$.

Первое упорядочение функций было предложено Адамаром (*Hadamard*) в 1883 г. [46] в связи с исследованиями по теории определителей. В 1923 г. Уолшем (*Walsh*) предложено упорядочение базисных функций Адамара в порядке возрастания перемен знаков [47], что придало таким системам большое сходство с привычными для инженеров гармоническими функциями [343]. С этих пор подобные симметричные системы стали называться системами функций Уолша. И, наконец, в 1932 г. Пэли (*Paley*) предложил упорядочение функций по скорости нарастания фазы [48].

Несмотря на то, что вначале семидесятых годов минувшего столетия были проведены ряд Международных симпозиумов по функциям Уолша, фактически с тех пор не было разработано ни одного нового упорядочения базисных функций Адамара и, соответственно, не была получена ни одна новая

симметричная система Уолша. Исключение, может быть, составляет система четвертого порядка, названная в статье [1] системой Уолша — Трахтмана. Такая система (обозначим ее T) получена в [40] методом простого перебора и дополняет три упоминавшиеся выше системы Уолша, упорядоченные по Адамару (H), Качмажу (W , именно такое название получила в последующем система, разработанная непосредственно Уолшем [47]) и Пэли (P). Далее кратко излагаются основные сведения относительно этих трех систем Уолша.

2.2.1. Системы функций Уолша — Адамара

Рассмотрим одну из возможных систем функций Уолша – *систему Уолша — Адамара*, являющейся исторически первой в рассматриваемом классе функций. В этой системе функции Уолша располагаются одна под другой в таком порядке, что из них образуется *матрица Адамара*. Для функций Уолша, упорядоченных по Адамару, используем обозначение $h(k, t)$, где k – порядок функции, а t – аргумент функции (дискретное время), совпадающий с номером отсчета функции.

Системы функций Уолша — Адамара N -го порядка (введем для них обозначение H_N) легко построить, основываясь на свойствах матриц Адамара. Матрица Адамара минимального порядка имеет вид

$$H_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Матрица H_4 подобна матрице (2.1), но ее элементами будут уже матрицы H_2 :

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix},$$

или на основании представления (2.1)

$$H_4 = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Число элементов в строке, так же как и число строк в матрице, при переходе от одной матрицы Адамара к соседней по порядку удваивается. Для произвольного $N = 2^{n+1}$, $n \geq 1$, справедливо рекуррентное соотношение

$$\mathbf{H}_{2^{n+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{2^n} & \mathbf{H}_{2^n} \\ \mathbf{H}_{2^n} & -\mathbf{H}_{2^n} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

В развернутом виде для интервала $N=8$, исходя из выражений (2.2) и (2.3), получим:

$$\mathbf{H}_8 = \{h(k, t)\} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \end{bmatrix} & , \end{matrix} \quad (2.4)$$

где k – номер (порядок) базисной функции h , а t – аргумент функции, играющий роль дискретного времени.

Заметим, что в матрице Адамара любая строка, кроме первой (верхней), содержит равное число плюсов и минусов. Кроме того, матрица \mathbf{H} является симметрической, т. е. не изменяется, если строки и столбцы поменять местами. Это указывает на полное равноправие переменных k и t матрицы Адамара.

Безотносительно к способу упорядочения функция нулевого порядка $\varphi(0, t)$ в произвольной системе Уолша равна +1, т. е.

$$\varphi(0, t) = h(0, t) = +, \quad t = \overline{0, N-1}. \quad (2.5)$$

Из сопоставления матриц (2.1), (2.2) и (2.4) следует, что в матрице Уолша—Адамара любого порядка

$$h(1, t) = \begin{cases} +1, & \text{если } t \text{ – четное;} \\ -1, & \text{если } t \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Опираясь на элементарный анализ свойств матриц (2.2) и (2.4), приходим к следующему рекуррентному алгоритму синтеза базисных функций систем Уолша — Адамара

$$h(2k, t) = h(k, t)^{[*]} \quad (2.6)$$

– для четных и

$$h(2k+1, t) = h(2k, t) \cdot h(1, t) \quad (2.7)$$

– для нечетных базисных функций.

Верхний значок [*] в правой части выражения (2.6) означает, что каждый t -й элемент k -й строки матрицы Адамара в $2k$ -й строке записывается дважды. Как мы убедимся в дальнейшем, базисные функции нечетных порядков для так называемых *фундаментальных симметричных систем Уолша*, рассматриваемых в п. 2.7, вычисляются по формуле, подобной выражению (2.7).

Из соотношений (2.1)–(2.3) следует, что система Уолша — Адамара функций H_{2^n} есть n -я кронекеровская степень системы ДЭФ второго порядка E_2 , заданных матрицей (1.32), т. е. $H_{2^n} = E_2^{[n]}$.

2.2.2. Системы функций Уолша-Пэли

Рассмотрим теперь систему функций Уолша, упорядоченную по другому принципу. Обозначим эту систему $\{p(k, t)\}$ и будем называть ее *системой Уолша — Пэли* функций. Она может быть образована из системы Уолша — Адамара двоичной инверсией номеров функций, т. е. путем записи двоичного представления номера функции матрицы H в обратном порядке для получения номера функции системы Уолша — Пэли P .

Двоично-инверсный порядок определяется следующим образом. Если записать естественный ряд чисел $0, 1, \dots, N-1$, причем $N=2^n$, $n \geq 1$, в двоичном коде, используя n двоичных разрядов, а затем инвертировать порядок следования разрядов, то получаемые при этом числа и будут номерами элементов последовательности чисел после их *двоично-инверсной перестановки* (ДИП). Для случая $N=8=2^3$ прямой порядок номеров приведен в табл. 2.1 слева, а двоично-инверсный порядок — справа.

Таблица 2.1. Двоично-инверсная перестановка

Исходный номер	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Матрицы систем Уолша-Пэли произвольного порядка $N = 2^n$ можно строить непосредственно с помощью следующего простого мнемонического правила. Для $N = 2$ матрица P_2 совпадает с матрицей E_2 (1.32) или задается, например, системой (2.1), т. е.

$$P_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}.$$

Для $N = 4$ каждая строка матрицы P_2 записывается дважды. Затем к четным строкам неполной матрицы (нумерация строк осуществляется сверху вниз, начиная с номера 0) справа приписываются те же самые элементы, которые находятся в левой части строки, а к нечетным – противоположные элементы. Имеем

$$P_4 = \{p(k, t)\} = \begin{matrix} & & & & 0 & 1 & 2 & 3 & t \\ & & & & 0 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ \hline + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{array} \right] \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ & & & & 3 & & & & \\ & & & & k & & & & \end{matrix}.$$

Аналогичным образом можно построить матрицы для $N = 8, 16$ и т. д. Образующиеся при этом матрицы преобразования систем Уолша — Пэли остаются симметрическими и отличаются от матриц систем Уолша — Адамара только расположением строк (базисных функций).

Согласно изложенному мнемоническому правилу для любого порядка N функция $p(1, t)$ матрицы P_N удовлетворяет системе равенств

$$p(1, t) = \begin{cases} +1, & t = 0, \overline{\frac{N}{2} - 1}; \\ -1, & t = \overline{\frac{N}{2}}, N - 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ниже приводится пример матрицы Уолша — Пэли восьмого порядка.

$$P_8 = \{p(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.9)$$

Соотношения (2.5) и (2.8) являются начальными условиями для рекуррентного синтеза базисных функций в системе Уолша — Пэли, которое непосредственно следует из матрицы преобразования (2.9), а именно:

$$p(2k, t) = p(k, (2t)_N), \quad k \geq 1, \quad t = \overline{0, N-1} \quad (2.10)$$

– для четных и

$$p(2k+1, t) = p(2k, t) \cdot p(1, t) \quad (2.11)$$

– для нечетных базисных функций.

Заметим, что правила (2.10) и (2.11) аналогичны соответственно правилам (1.12) и (1.13), что является свидетельством определенного сходства базисов ДЭФ и Уолша — Пэли функций.

Это сходство проявляется в следующем. В матрицах Уолша — Пэли (далее – просто Пэли), как и ДЭФ, элементы правых половин четных строк повторяют соответствующие элементы левых половин, а в нечетных строках –

инверсны к ним. Подобные правила справедливы также и для столбцов матрицы Пэли, что является следствием ее симметричности.

Как отмечено ранее, матрица Пэли может быть получена из матрицы Адамара в результате двоично-инверсной перестановки ее строк. Очевидно, справедливо и обратное, а именно: двоично-инверсная перестановка строк матрицы Уолша-Пэли восстанавливает матрицу Адамара, как это отображено на рис. 2.1.

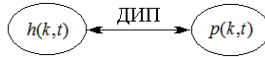


Рисунок 2.1. Взаимосвязь номеров функций Уолша в системах Адамара и Пэли

2.2.3. Системы функций Уолша — Качмажа

В 1923 г. Уолшем предложена [47] полная система ортонормированных знаковых функций, упорядоченных на интервале определения N по возрастанию числа знакоперемен базисных функций системы. В дальнейшем такая система получила название системы Уолша, упорядоченной по Качмажу, или *системы Уолша — Качмажа*. Ниже приведена матрица восьмого порядка данной системы.

$$W_8 = \{w(k, t)\} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \end{bmatrix} & . \end{matrix} \quad (2.12)$$

Отличительная особенность систем Уолша — Качмажа состоит в том, что в ней функции упорядочены по числу перемен знаков. Таким образом, матрица Уолша (2.12) образуется в результате определенным образом организованной перестановки строк (базисных функций) матрицы Адамара. Легко проверить (сопоставляя, например, матрицы (2.9) и (2.12)), что номер k_0 базисной

функции $w(k, t)$ системы Уолша W связан с номером k_p базисной функции $p(k, t)$ системы Пэли P соотношением

$$k_\omega = \overset{\circ}{\text{ОКГ}}\{k_p\}.$$

Справедливо и обратное

$$k_p = \overset{\circ}{\text{КГ}}\{k_\omega\}.$$

Следовательно, для того чтобы матрицу Пэли N -го порядка P_N трансформировать в матрицу Уолша W_N , достаточно переставить номера базисных функций системы Пэли в двоичном представлении по закону обратного кодирования по Грею левостороннему, обозначенному как $\overset{\circ}{\text{ОКГ}}$ [5-9]. Переход от матрицы Уолша W_N к матрице Пэли P_N осуществляется перестановкой номеров базисных функций матриц W_N по коду Грея прямому левостороннему ($\overset{\circ}{\text{КГ}}$). Взаимосвязь матриц P и W показана на рис. 2.2.

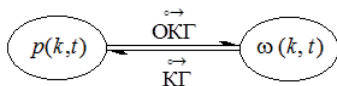


Рисунок 2.2. Взаимосвязь номеров функций в системах Пэли и Уолша

Вполне очевидно, что для того чтобы матрицу Адамара H_N преобразовать в матрицу Уолша W_N , сначала следует от H_N перейти к P_N (эта операция реализуется двоично-инверсной перестановкой номеров базисных функций системы Адамара), а затем номера базисных функций системы Пэли трансформировать по схеме, показанной на рис. 2.3 [28].

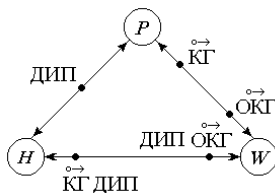


Рисунок 2.3. Взаимосвязь номеров функций в системах Уолша

Следовательно, процедура перехода от k_o к k_p может быть истолкована как преобразование номеров (порядков) базисных функций системы Уолша — Качмажа по коду Грея $\overset{\circ}{\leftarrow} \text{КГ}$ прямому левостороннему. На этом этапе происходит преобразование системы Уолша — Качмажа в систему Уолша — Пэли. В последующем двоичной инверсией порядков этих функций система Уолша—Пэли трансформируется в систему Уолша — Адамара.

Тремя рассмотренными системами не исчерпываются все возможные системы функций Уолша. Но как раз именно эти три системы наиболее полно изучены и описаны в научно-технической литературе.

2.3. Системы функций Уолша-Кули

Обратим внимание на то, что системы функций H , P и W (рис. 2.3) связаны между собой простыми или составными кодами Грея. При этом только система Пэли P связана с двумя другими системами H и W элементарными операторами Грея, среди которых оператор ДИП и левосторонние (прямой и обратный) коды Грея. Все выше сказанное приводит нас к идее проверки гипотезы о возможности построения симметричных систем Уолша на основе перестановки номеров базисных функций матриц Пэли с помощью правосторонних преобразований Грея $\overset{\circ}{\leftarrow} \text{КГ}$ и $\overset{\circ}{\leftarrow} \text{ОКГ}$ [5-9]. В результате перестановки строк матриц Пэли восьмого порядка по коду Грея обратному правостороннему $\overset{\circ}{\leftarrow} \text{ОКГ}$ приходим к симметрической матрице

$$C_8 = \{c(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.13)$$

Назовем систему C_N *системой функций Уолша — Кули* [13], базисные функции которой обозначим $c(k, t)$. Номера (порядки) k_c базисных функций

системы Уолша — Кули связаны с номерами k_p базисных функций системы Уолша-Пэли соотношением:

$$k_c = \overset{\leftarrow{\infty}}{\text{ОКГ}}\{k_p\}$$

и соответственно

$$k_p = \overset{\leftarrow{\infty}}{\text{КГ}}\{k_c\},$$

что наглядно отображено на рис. 2.4.

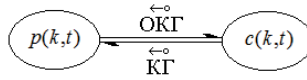


Рисунок 2.4. Взаимосвязь номеров функций в системах Пэли и Кули

Исходя из матрицы (2.13), составим рекуррентные формулы для синтеза функций $c(k,t)$ системы Уолша — Кули. Базисная функция первого порядка $c(1,t)$ системы (вторая строка матрицы Кули) для произвольного $N = 2^n$, $n \geq 2$, составляется по правилу

$$c(1,t) = \begin{cases} +1, & t = 0, \overline{\frac{N}{4} - 1} \quad \text{и} \quad t = \overline{\frac{3N}{4}, N-1}; \\ -1, & t = \overline{\frac{N}{4}, \frac{3N}{4} - 1}. \end{cases}$$

Все остальные функции $c(k,t)$ вычисляются рекуррентно по формулам, соответствующим рекуррентным формулам определения базисных функций в системе функций Уолша — Пэли (2.10) и (2.11), т. е.

$$c(2k,t) = c\left(k, \overline{(2t)_N}\right), \quad k \geq 1, \quad t = \overline{0, N-1}$$

– для четных и

$$c(2k+1,t) = c(2k,t) \cdot c(1,t)$$

– для нечетных базисных функций.

2.4. Взаимосвязь частотных шкал процессоров ДПФ

Система функций Уолша — Кули обладает замечательным свойством, которое можно сформулировать следующим образом

Среди всех симметричных систем Уолша лишь единственная система Уолша — Кули доставляет линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ по отношению к дискретному комплексно-экспоненциальному сигналу с целочисленными нормированными параметрами.

Все остальные системы Уолша отмеченным свойством не обладают. Покажем это на примере систем \mathbf{H} , \mathbf{P} и \mathbf{W} восьмого порядка. Итак, допустим, что на вход процессора ДПФ подведен дискретный комплексно-экспоненциальный сигнал

$$\dot{x}_\gamma(t) = e^{j\frac{2\pi}{N}\gamma t}, \quad \gamma, t = \overline{0, N-1}, \quad (2.14)$$

где N — объем выборки; γ — нормированная частота входного сигнала; t — номер временного отсчета сигнала (нормированное дискретное время).

Зададим спектр сигнала соотношением

$$\dot{X}_\gamma(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{x}_\gamma(t) \varphi(k, t), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.15)$$

в котором k — номер гармоники сигнала; $\varphi(k, t)$ — базисная функция k -го порядка системы Уолша, а параметры N , γ и t такие же, как и в формуле (2.14).

Положим интервал N равным восьми, т. е. пусть

$$\dot{x}_\gamma(t) = e^{j\frac{\pi}{4}\gamma t}, \quad \gamma, t = \overline{0, 7}, \quad (2.16)$$

а в качестве систем функций Уолша выберем систему базисных функций Уолша — Пэли, симметрическая матрица преобразования \mathbf{P}_8 которой определена выражением (2.9).

Наиболее просто задача определения гармоник $\dot{X}_\gamma(k)$, $k = \overline{0, 7}$ сигнала (2.15) в базисе (2.9) решается графоаналитическим способом. При этом легко убедиться в том, что если входной сигнал является нечетным (т. е. частота γ в формуле (2.16) принимает нечетное значение), то ему будут соответствовать только нечетные гармоники на частотах $k = 1, 3, 5$ и 7 , во время как четные гармоники будут равны нулю. Точно также, если входной сигнал четный, то ему отвечают только четные гармоники, а нечетные равны нулю.

Введем для произведения сигнала $\dot{x}_\gamma(t)$ и элемента $\varphi(k, t)$ базисной функции Уолша обозначение

$$\dot{y}_t = \dot{x}_\gamma(t) \varphi(k, t). \quad (2.17)$$

На рис. 2.5 и 2.6 кружочками на векторах сигнала $\dot{x}_1(n)$ отображены произведения \dot{y}_n , отвечающие первой и третьей гармоникам сигнала (2.17) соответственно.

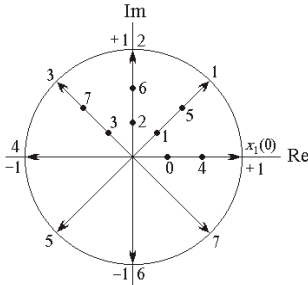


Рисунок 2.5. К определению гармоники $\dot{X}_1(1)$

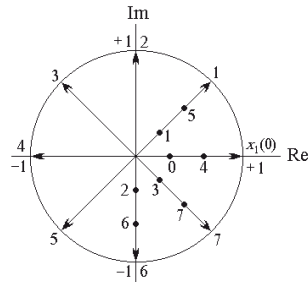


Рисунок 2.6. К определению гармоники $\dot{X}_1(3)$

Цифры в окрестности черных кружочков (точек) отображают значения индекса t в произведении \dot{y}_t , заданном формулой (2.17), а цифры, стоящие у вершин стрелок векторов, определяют номер отсчета t сигнала $\dot{x}_1(t)$.

Выполнив построения для пятой и седьмой гармоник сигнала $\dot{x}_1(t)$, приходим к разметкам векторов этого сигнала, показанных на рис. 2.7 и 2.8 соответственно.

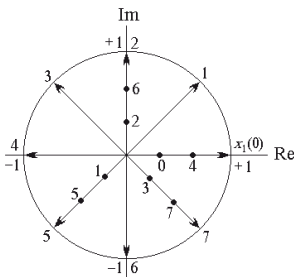


Рисунок 2.7. К определению гармоники $\dot{X}_1(5)$

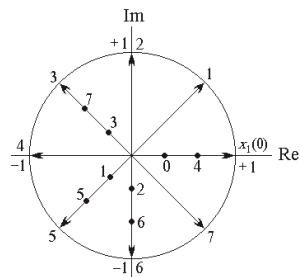


Рисунок 2.8. К определению гармоники $\dot{X}_1(7)$

Вектор $\dot{X}_\gamma(k)$ равен сумме отмеченных на рисунках векторов сигнала $\dot{x}_\gamma(t)$. Для нечетных гармоник эта сумма является комплексной величиной, которую будем записывать в таком виде

$$\alpha(a, b) = \alpha(a + jb),$$

где α – целый коэффициент (для рассматриваемого примера он равен числу точек на векторах сигнала); a и b – вещественная и мнимая компоненты комплексного вектора соответственно.

Рассчитанные описанным графоаналитическим методом гармоники сигнала (2.24) сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Гармоники нечетного комплексно-экспоненциального сигнала $\dot{x}_\gamma(t)$ в базисе функций Уолша-Пэли восьмого порядка

γ	$\dot{X}_\gamma(1)$	$\dot{X}_\gamma(3)$	$\dot{X}_\gamma(5)$	$\dot{X}_\gamma(7)$
1	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -1 - \sqrt{2})$
3	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$	$2(1 - \sqrt{2}, -1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$
5	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -1 - \sqrt{2})$	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$
7	$2(1 - \sqrt{2}, -1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$

Если сигнал на входе процессора ДПФ четный, то ему отвечают четные гармоники спектра, а нечетные равны нулю. Примеры расчета четных гармоник $\dot{X}_2(2)$ и $\dot{X}_2(4)$ сигнала $\dot{x}_2(t)$ показаны на рис. 2.9 и 2.10 соответственно.

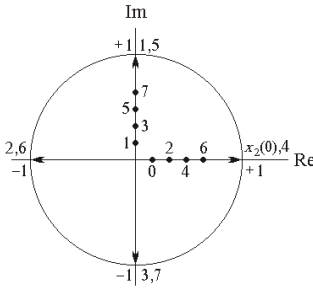


Рисунок 2.9. К определению гармоники $\dot{X}_2(2)$

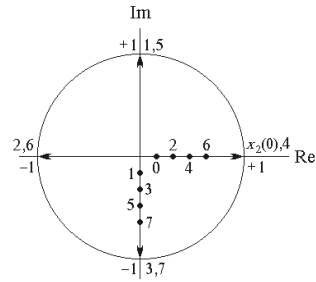


Рисунок 2.10. К определению гармоники $\dot{X}_2(4)$

Результаты расчета гармоник четного сигнала сведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3. Гармоники четного комплексно-экспоненциального сигнала $\dot{x}_m(n)$ в базисе функций Уолша-Пэли восьмого порядка

γ	$\dot{X}_\gamma(0)$	$\dot{X}_\gamma(2)$	$\dot{X}_\gamma(4)$	$\dot{X}_\gamma(6)$
0	8	0	0	0
2	0	4(1, 1)	0	4(1, -1)
4	0	0	8	0
6	0	4(1, -1)	0	4(1, 1)

Как следует из табл. 2.2 и 2.3, на главных диагоналях матриц спектра расположены гармоники с максимальными амплитудами и положительными фазами. Исключение составляют гармоники $\dot{X}_3(3)$ и $\dot{X}_7(7)$, которые не являются по модулю максимальными, а их фазы – отрицательные. Если $N = 16$, то число таких гармоник, выпадающих из главной диагонали матрицы, составляет 8 и увеличивается с ростом N . Это является свидетельством того, что

базис Уолша — Пэли функций не обеспечивает полной линеаризации частотных шкал входного и выходного сигналов.

Отклики выходных частотных каналов восьмиточечного процессора ДПФ в базисе функций Уолша — Пэли показаны на рис. 2.11, а в базисах функций Уолша — Адамара и Уолша — Качмажа на рис. 2.12a и 2.12b соответственно. Отбор частотных каналов процессора в этих базисах такой же, как в базисе функций Пэли, то есть выбирается канал с максимальным откликом и положительной фазой.

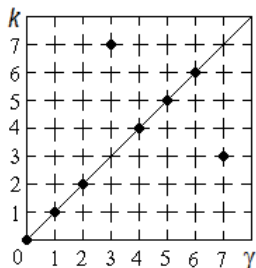


Рисунок 2.11. Соотношение частотных шкал процессора ДПФ в базисе функций Уолша-Пэли

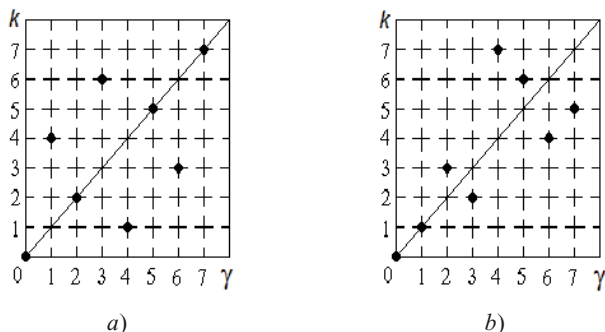


Рисунок 2.12. Соотношение частотных шкал процессора ДПФ в базисах:

a) – Уолша — Адамара

b) – Уолша — Качмажа

Как следует из данных, представленных на рис. 2.11 и 2.12,

ни одна из трех классических систем базисных функций Уолша, упорядоченных по Адамару, Пэли или Качмажу, не обеспечивают линейной связности частотным шкалам процессора ДПФ.

Единственная система Уолша, доставляющая линейную связность частотным шкалам процессора ДПФ, является система Уолша — Кули.

2.5. Спектр сигналов в базисе функций Уолша—Кули

Как отмечено ранее базис функций Уолша — Кули обладает весьма привлекательным для спектрального анализа свойством. В частности, для входных сигналов типа дискретной комплексной экспоненты (2.14) его гармоники $\dot{X}_\gamma(k)$ с максимальными амплитудами и отрицательными фазами располагаются исключительно вдоль главной диагонали квадратной матрицы спектра $\{\dot{X}_\gamma(k)\}$, $\gamma, k = 0, N-1$. А это означает, что

по номеру канала процессора ДПФ в базисе функций Уолша — Кули с максимальным модулем отклика и отрицательной фазой можно однозначно определить частоту входного сигнала.

Заметим, что при $\gamma=0$ и $\gamma=N/2$ соответствующие нулевая и $N/2$ -я гармоники будут вещественными числами, равными N . Никаких других

гармоник сигнала на этих частотах не существует, поэтому и отпадает необходимость в измерении их фаз.

Для проведения последующих расчетов спектра комплексно-экспоненциального сигнала (2.14) обратимся к матрице Кули (2.13)

$$C_8 = \{c(k, t)\} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & \vdots & + & + & + & + \\ + & + & - & - & \vdots & - & - & + & + \\ + & - & - & + & \vdots & + & - & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & - & + & - & + \\ + & - & + & - & \vdots & + & - & + & - \\ + & - & - & + & \vdots & - & + & + & - \\ + & + & - & - & \vdots & + & + & - & - \\ + & + & + & + & \vdots & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.18)$$

Как следует из общего выражения (2.15) k -я комплексная гармоника $\dot{X}_\gamma(k)$ сигнала $\dot{x}_\gamma(t)$ образуется в результате суммирования векторов сигнала, соответствующих его значениям в моменты времени t , взятых с весами $+$ или $-$, которые расположены в t -х элементах k -й строки матрицы (2.18).

Воспользуемся часто применявшимся ранее графоаналитическим методом вычисления гармоник. Для примера рассчитаем гармоники сигнала (2.16) на частоте $\gamma=1$ для $N=8$, когда

$$\dot{x}_\gamma(t) = e^{j\frac{\pi}{4}\gamma t}, \quad t = \overline{0, 7}. \quad (2.19)$$

Как и в базисе функций Уолша — Пэли, в рассматриваемом базисе функций Уолша — Кули нечетный сигнал на частотах $\gamma=1, 3, 5$ и 7 содержит полный набор нечетных гармоник $\dot{X}_\gamma(k)$, $k=1, 3, 5$ и 7 . Четные сигналы обладают одной (на частотах $k=0$ или $k=4$) или двумя (на частотах $k=2$ и $k=6$) гармониками.

Итак, для определения гармоники $\dot{X}_1(1)$ следует все векторы сигнала (2.19) умножить на веса $(+)$ или $(-)$, которые расположены в соответствующих элементах второй строки (т. е. для $k=1$) матрицы (2.18).

Результаты перемножений показаны на рис. 2.13. Суммируя отмеченные векторы и выделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\dot{X}_1(1) = 2(1 + \sqrt{2}, -1),$$

где $(\alpha, \beta) = \alpha + j\beta$.

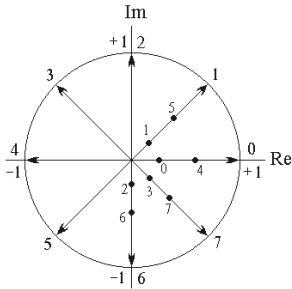


Рисунок 2.13. К определению гармоники $\dot{X}_1(1)$

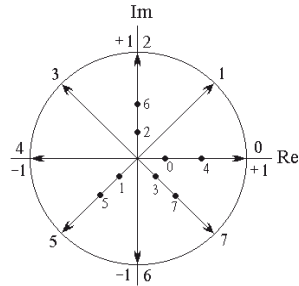


Рисунок 2.14. К определению гармоники $\dot{X}_1(3)$

При вычислении гармоники $\dot{X}_1(3)$ векторы сигнала $\dot{x}_1(t)$ следует брать с весами, которые расположены в соответствующих элементах четвертой ($k=3$) строки матрицы (2.18). Результаты вычислений показаны на рис. 2.14. Имеем $\dot{X}_1(3) = 2(1, -(\sqrt{2}-1))$. Аналогичным образом находим оставшиеся две гармоники (рис. 2.15 и 2.16).

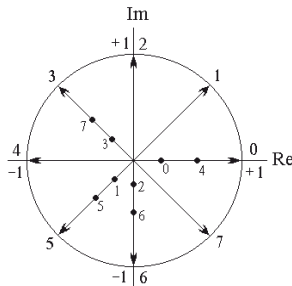


Рисунок 2.15. К определению гармоники $\dot{X}_1(5)$

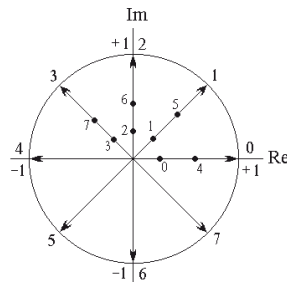


Рисунок 2.16. К определению гармоники $\dot{X}_1(7)$

Получим

$$\dot{X}_1(5) = 2(-(\sqrt{2}-1), -1); \quad \dot{X}_1(7) = 2(1, 1 + \sqrt{2}).$$

Численные значения гармоник нечетных сигналов сведены в табл. 2.4, а четных сигналов – в табл. 2.5.

Таблица 2.4. Нечетные гармоники сигнала (2.19)

k	$\dot{X}_1(k)$	$\dot{X}_3(k)$	$\dot{X}_5(k)$	$\dot{X}_7(k)$
1	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$
3	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -(1 + \sqrt{2}))$	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$
5	$2(1 - \sqrt{2}, -1)$	$2(1 + \sqrt{2}, 1)$	$2(1 + \sqrt{2}, -1)$	$2(1 - \sqrt{2}, 1)$
7	$2(1, 1 + \sqrt{2})$	$2(1, \sqrt{2} - 1)$	$2(1, 1 - \sqrt{2})$	$2(1, -(1 + \sqrt{2}))$

Таблица 2.5. Четные гармоники сигнала (2.19)

k	$\dot{X}_0(k)$	$\dot{X}_2(k)$	$\dot{X}_4(k)$	$\dot{X}_6(k)$
0	8	0	0	0
2	0	$4(1, -1)$	0	$4(1, 1)$
4	0	0	8	0
6	0	$4(1, 1)$	0	$4(1, -1)$

Из анализа табл. 2.4 и 2.5 следует, что на главной диагонали матрицы спектра $\{\dot{X}_\gamma(k)\}$, $\gamma, k = \overline{0, 7}$, также как и для матрицы любого порядка $N = 2^n$, располагаются гармоники с максимальными модулями и отрицательными фазами, т. е.

базис функций Уолша — Кули произвольного порядка N , являющегося степенью двойки, обеспечивает линейную связанность частотным шкалам процессора ДПФ.

Существуют также определенные закономерности для гармоник целочисленных комплексно-экспоненциальных сигналов и в других системах базисных функций Уолша, установление которых мы оставляем любознательным читателям для самостоятельного исследования.

2.6. Синтез симметричных систем функций Уолша

Четыре рассмотренные выше системы не исчерпывают множества всех возможных систем функций Уолша. В данном параграфе будет показано, что помимо систем Уолша, упорядоченных по Адамару, Пэли, Качмажу или Кули, существуют и другие симметричные системы Уолша [20].

Как известно [40, 42], для того чтобы спектральная теория, построенная на основе какой-либо базисной системы функций, была достаточно “хорошей”

(то есть располагала привычными понятиями и теоремами), необходимо, чтобы эта система была *мультипликативной, ортогональной и симметричной* относительно номера функции в системе и номера отсчета. Именно таким набором свойств обладают симметричные системы (матрицы) Уолша. Следовательно, симметричные системы функций Уолша могут быть использованы в качестве базисов дискретного преобразования Фурье. Возникает вопрос, а сколько вообще можно построить симметричных систем функций Уолша?

Для $N=2$ существует только одна система. На интервале $N=4$ различных систем функций Уолша будет уже четыре [40]. Действительно, первую строку матрицы (нулевая базисная функция) переставлять на другое место нельзя, так как это заведомо приведет к асимметрии. Осуществляя всевозможные перестановки остальных трех строк матрицы Адамара, получаем четыре симметрические матрицы

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

система Адамара

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

система Пэли

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix}$$

система Качмажа

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{bmatrix}$$

система Кули

Интервалу $N=8$ соответствует $7!=5040$ систем Уолша. При $N=16$ число систем (симметричных и несимметричных) составляет $15! \approx 1,3 \cdot 10^{12}$. Понятно, что если для $N=8$ еще возможно (по крайней мере, на компьютере) осуществить перебор всех перестановок функций Уолша, то для $N=16$ и выше эта задача становится невыполнимой.

В данном параграфе рассматриваются регулярные методы синтеза симметричных систем Уолша, в состав которых входят метод *направленной перестановки базисных функций* [20], метод *индикаторных матриц* [14] и метод *преобразований Грея* [6-9].

2.6.1. Метод направленной перестановки базисных функций

Идею данного метода изложим на примере синтеза симметрических матриц Уолша восьмого порядка [20]. На начальном этапе синтеза необходимо выбрать любую известную матрицу Уолша, в качестве которой примем матрицу Пэли, заданную соотношением (2.9), которая для удобства ниже переписана заново.

$$P_8 = \{p(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.20)$$

k

Выше было отмечено, что в любой системе Уолша первая строчка матрицы преобразования (базисная функция нулевого порядка) состоит из одних “плюсов” и не может быть переставлена ни на какую другую строчку, так как это приводит к потере симметричности матрицы. Во второй строке матрицы может находиться любая из оставшихся строк (базисных функций) матрицы (2.20). Выберем в качестве таковой базисную функцию первого порядка системы Пэли, т.е. функцию $p(1, t)$, в результате чего получим следующие две строчки и два столбца формируемой матрицы

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2,3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ (+ & +) \\ + & + \\ + & - \\ + & - \\ + & - \\ + & - \\ + & - \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.21)$$

k

Возможности выбора третьей строки ограничены условием сохранения симметричности матрицы. Для того чтобы это условие соблюсти, из оставшихся строк матрицы (2.20) нужно выбрать только такие, начальные элементы которых совпадают с начальными элементами третьей (нумеруя сверху вниз) строки матрицы (2.21). Выделенным элементам отвечают вторая и

третья базисные функции матрицы (2.20), номера которых выписаны в (2.21) слева от круглых скобок. Выберем в качестве третьей строки формируемой матрицы базисную функцию второго порядка системы (2.20). Получим

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad t \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + \\
 + & + & + & + & - & - & - & - \\
 + & + & - & - & + & + & - & - \\
 (+ & + & -) & & & & & & \\
 + & - & + & & & & & & \\
 + & - & + & & & & & & \\
 + & - & - & & & & & & \\
 + & - & - & & & & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \cdot \quad (2.22)$$

На следующем шаге из базисных функций системы Пэли (2.20) выбираем такие, начальные элементы которых соответствуют выделенным круглыми скобками элементам матрицы (2.22). Этому условию отвечают базисные функции второго и третьего порядков системы (2.42). Но базисная функция второго порядка уже была задействована в матрице (2.22). Поэтому на месте четвертой строки формируемой матрицы можем поставить лишь базисную функцию третьего порядка системы

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4,5 \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad t \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + \\
 + & + & + & + & - & - & - & - \\
 + & + & - & - & + & + & - & - \\
 + & + & - & - & - & - & + & + \\
 (+ & - & + & -) & & & & & \\
 + & - & + & - & & & & & \\
 + & - & - & + & & & & & \\
 + & - & - & + & & & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \cdot \quad (2.23)$$

Пятой строке матрицы (2.23) соответствуют базисные функции четвертого и пятого порядков системы Пэли. Выберем функцию четвертого порядка и приходим к матрице

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\
 0 & + & + & + & + & + & + & + & + & \\
 1 & + & + & + & + & - & - & - & - & \\
 2 & + & + & - & - & + & + & - & - & \\
 3 & + & + & - & - & - & - & + & + & \\
 4 & + & - & + & - & + & - & + & - & \\
 5 & (+ & - & + & - & -) & & & & \\
 & + & - & - & + & + & & & & \\
 & + & - & - & + & - & & & & \\
 k & & & & & & & & &
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot \quad (2.24)$$

Шестой строке матрицы (2.24) отвечает единственная базисная функция пятого порядка системы (2.20), т. е.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\
 0 & + & + & + & + & + & + & + & + & \\
 1 & + & + & + & + & - & - & - & - & \\
 2 & + & + & - & - & + & + & - & - & \\
 3 & + & + & - & - & - & - & + & + & \\
 4 & + & - & + & - & + & - & + & - & \\
 5 & + & - & + & - & - & + & - & + & \\
 6 & (+ & - & - & + & + & -) & & & \\
 & + & - & - & + & - & + & & & \\
 k & & & & & & & & &
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot \quad (2.25)$$

Седьмой строке матрицы (2.25) соответствует базисная функция шестого порядка системы (2.20). Оставшаяся базисная функция седьмого порядка системы Пэли займет восьмую строчку формируемой матрицы. В результате описанного отбора базисных функций, являющегося направленным перебором базисных функций, получим симметрическую матрицу, полностью совпадающую с матрицей Пэли, заданную соотношением (2.20), что вполне естественно. Обозначим эту матрицу как $M1$.

Продолжим процедуру синтеза симметричных систем Уолша. С этой целью обратимся к матрице (2.23). Пятой строчке этой матрицы отвечает не только четвертая (уже использованная в соотношении (2.24)), но и пятая базисная функция (т.е. базисная функция пятого порядка) системы (2.20). Размещая ее на месте пятой строки матрицы (2.24), получим

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 5 \\
 4 \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad t \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + \\
 + & + & + & + & - & - & - & - \\
 + & + & - & - & + & + & - & - \\
 + & + & - & - & - & - & + & + \\
 + & - & + & - & - & + & - & + \\
 (+ & - & + & - & +) \\
 + & - & - & + & - \\
 + & - & - & + & +
 \end{array} \right]
 \end{array}
 . \quad (2.26)$$

Как следует из соотношения (2.26) на месте шестой строки может быть размещена лишь базисная функция четвертого порядка, т. е.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 5 \\
 4 \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad t \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + \\
 + & + & + & + & - & - & - & - \\
 + & + & - & - & + & + & - & - \\
 + & + & - & - & - & - & + & + \\
 + & - & + & - & - & + & - & + \\
 + & - & + & - & + & - & + & - \\
 + & - & - & + & - & + \\
 + & - & - & + & + & -
 \end{array} \right]
 \end{array}
 . \quad (2.27)$$

В соответствии с выражением (2.27) седьмую и восьмую строки формируемой матрицы могут занимать соответственно базисные функции седьмого и шестого порядков системы Пэли соответственно. Тем самым получим матрицу

$$M_2 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Возвратимся к матрице (2.21). В этой матрице на месте третьей строки можно разместить не только вторую, но и третью базисные функции системы (2.20) и т. д. Продолжая процедуру направленной перестановки базисных функций, приходим к полному набору из 28 перестановок, представленных в табл. 2.6, каждая из которых порождает симметрическую матрицу Уолша.

Таблица 2.6. Перестановки базисных функций матрицы Пэли, образующие симметричные системы Уолша

<i>M</i>	Номер базисной функции матрицы <i>P</i>							<i>M</i>	Номер базисной функции матрицы <i>P</i>								
1	0	1	2	3	4	5	6	7	15	0	4	2	6	1	5	3	7
2	0	1	2	3	5	4	7	6	16	0	4	3	7	2	6	1	5
3	0	1	3	2	6	7	5	4	17	0	5	1	4	6	3	7	2
4	0	1	3	2	7	6	4	5	18	0	5	1	4	7	2	6	3
5	0	2	4	6	1	3	5	7	19	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	2	5	7	3	1	6	4	20	0	5	3	6	7	2	4	1
7	0	2	6	4	1	3	7	5	21	0	6	4	2	1	7	5	3
8	0	2	7	5	3	1	4	6	22	0	6	5	3	2	4	7	1
9	0	3	4	7	5	6	1	2	23	0	6	7	1	2	4	5	3
10	0	3	5	6	7	4	2	1	24	0	6	7	1	3	5	4	2
11	0	3	6	5	4	7	2	1	25	0	7	4	3	5	2	1	6
12	0	3	7	4	6	5	1	2	26	0	7	5	2	6	1	3	4
13	0	4	1	5	2	6	3	7	27	0	7	6	1	4	3	2	5
14	0	4	1	5	3	7	2	6	28	0	7	6	1	5	2	3	4

В табл. 2.6 в столбцах *M* выписаны последовательные номера симметрических матриц Уолша восьмого порядка, синтезированных по методу направленных перестановок базисных функций системы Уолша–Пэли *P*, а в соответствующих строках – перестановки базисных функций системы, которые приводят к симметрическим матрицам Уолша.

Соотношения между порядком N матриц Уолша и числом L симметрических матриц, отвечающим данному порядку, полученные по методу направленных перестановок базисных функций, приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7. Оценка числа L симметрических матриц Уолша N -го порядка

N	1	2	4	8	16	32
L	1	1	4	28	448	13888

Ряды N и L табл. 2.7 можно отобразить в виде следующей мнемонической схемы (рис. 2.17).

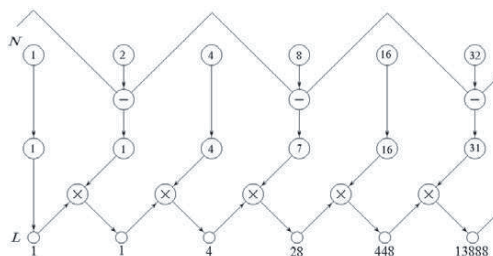


Рисунок 2.17. Мнемоническая схема определения числа симметрических матриц Уолша:

⊗ – перемножитель; ⊖ – вычитатель единицы

Обозначим $L = L_N = L_{2^n}$. На основании рис. 2.17 по дедукции приходим к рекуррентной формуле

$$L = \prod_{i=1}^n (2^i - (i)_2), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) дает общую оценку числа симметрических матриц Уолша для произвольного $N = 2^n$. Другим методом ранее оценка L была получена в [1].

Обратим внимание на то, что синтез симметрических матриц Уолша размерности N , равной степени 2, по методу направленной перестановки базисных функций не только обеспечивает получение полного набора этих матриц, но и доставляет минимум затрат машинного времени, поскольку исключает тупиковые перестановки базисных функций стартовой матрицы Уолша.

2.6.2. Метод индикаторных матриц

В основе синтеза симметричных систем Уолша, для полной совокупности которых введем единое обозначение W_N , где N – порядок матрицы Уолша, находится следующая теорема.

Теорема 2.1. *Каждой симметричной системе Уолша W_N порядка $N = 2^n$, $n \geq 2$, отвечает единственная однозначно связанная с ней индикаторная матрица J_W n -го порядка.*

Доказательство теоремы, как и определение термина, *индикаторная матрица*, будет выполнено в ходе дальнейшего изложения материала данного раздела.

Порядок n индикаторной матрицы J_W системы Уолша W_N связан с порядком N матрицы системы соотношением $n = \log_2 N$.

Индикаторные матрицы J_W играют чрезвычайно важную роль в системах Уолша [12, 15]. Такие матрицы, во-первых, *доставляют возможность компактно описывать системы Уолша большого порядка* и, во-вторых, *позволяют более успешно решать задачи синтеза систем Уолша* (по сравнению, например, с достаточно простым, но громоздким методом направленного перебора, изложенным в предыдущем параграфе).

Перейдем к более подробному пояснению понятия термина *индикаторная матрица* системы функций Уолша, определение которой мы введем следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Индикаторной матрицей J_W системы функций Уолша W_N порядка $N = 2^n$, $n \geq 2$, является правосторонне симметрическая $(0, 1)$ -матрица n -го порядка (необходимые условия), невырожденная в кольце вычетов по модулю 2 (достаточные условия).*

Правосторонне симметрической называется квадратная матрица, симметричная относительно вспомогательной диагонали. Таким образом, индикаторными матрицами J_W систем функций Уолша являются квадратные правосторонне симметрические двоичные матрицы n -го порядка, определители которых по модулю 2 равны единице.

Совокупность $(0, 1)$ -матриц третьего порядка, удовлетворяющих условиям теоремы 2.2, сведена в табл. 2.8. Каждая матрица обозначена или буквенным идентификатором, или цифровым номером. Идентификаторы P , H , C и W отвечают индикаторным матрицам рассмотренных ранее систем

Уолша восьмого порядка, упорядоченных по Пэли, Адамару, Кули и Уолшу соответственно. Оставшиеся буквенные идентификаторы A и B будут уточнены позже.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Число двоичных правосторонне симметрических матриц третьего порядка, содержащихся в табл. 2.8, совпадает с числом симметричных систем Уолша восьмого порядка, вычисленным по формуле (2.28), что является прямым подтверждением взаимосвязи систем Уолша и их индикаторных матриц

Таблица 2.8. Индикаторные матрицы систем Уолша восьмого порядка

P	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	22	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	23	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	17	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	24	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	25	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
W	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

К индикаторным матрицам J_W систем функций Уолша W_N можно прийти посредством так называемых *образующих матриц*, являющихся, в

определенной мере, аналогами образующих матриц линейных двоичных кодов [29]. Имеет место следующее положение.

Утверждение 2.1. *Образующей матрицей G_W системы Уолша W_N порядка $N=2^n$, $n>1$, является матрица, составленная из n базисных функций $w(k, t)$ порядка $k=2^j$, $j=0, \overline{n-1}$, системы, причем функции располагаются в матрице G_W , начиная с ее верхней строки, т. е.*

$$G_W = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ 2^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} w(2^0, t) \\ w(2^1, t) \\ \dots \\ w(2^{n-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Индикаторные матрицы (табл. 2.8) представляют собой $(0, 1)$ -матрицы. В связи с этим в дальнейшем перейдем от знаковых элементов различных матриц Уолша к их цифровым эквивалентам, воспользовавшись заменой знака + цифрой 0, а знака – цифрой 1. Такая замена элементов матриц сопровождается, к тому же, заменой операции перемножения базисных функций на операцию поразрядного сложения этих функций по модулю 2.

В результате перехода от знакового представления матриц к их числовому отображению приходим к следующим формам записи систем Уолша восьмого порядка, расставляя их в последовательности P , H , W и C :

$$P_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad H_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad (2.30)$$

$$W_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad C_8 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

На основании соотношений (2.30) по формуле (2.29) составим образующие матрицы систем Уолша. Имеем

$$\mathbf{G}_P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad (2.31)$$

$$\mathbf{G}_H = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad (2.32)$$

$$\mathbf{G}_W = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G}_C = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.34)$$

Образующая матрица \mathbf{G}_M восстанавливает систему функций Уолша \mathbf{M} в результате преобразования

$$\mathbf{M} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_M)_2, \quad (2.35)$$

где \mathbf{x} – двоичная вектор-строка n -го порядка, последовательно принимающая двоичные значения из интервала $[0, 2^n - 1]$. Матричные вычисления в соотношении (2.35) осуществляются над кольцом вычетов по модулю 2, т. е. результаты всех вычислений приводятся к остатку по mod 2.

Образующие матрицы \mathbf{G}_M могут быть представлены в компактной форме. С этой целью введем квадратную матрицу n -го порядка \mathbf{Q}_M , составленную из столбцов матрицы \mathbf{G}_M , номера которых равны 2^t , $t = \overline{0, n-1}$. Для матриц (2.31)–(2.34) получим

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad t \\ 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \\ k \end{array} \\ \mathbf{Q}_P = 2 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad t \\ 1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 4 \\ k \end{array} \\ \mathbf{Q}_H = 2 \end{array} ; \end{array} \quad (2.36)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad t \\ 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \\ k \end{array} \\ \mathbf{Q}_W = 2 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad t \\ 1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 \\ k \end{array} \\ \mathbf{Q}_C = 2 \end{array} .$$

Сведем в табл. 2.9 матрицы \mathbf{Q}_M и индикаторные матрицы \mathbf{J} (табл. 2.8) соответствующих систем Уолша \mathbf{P} , \mathbf{H} , \mathbf{W} и \mathbf{C} . Из сопоставления матриц, представленных в табл. 2.9, приходим к следующему соотношению

$$\mathbf{J}_M = \overline{\mathbf{Q}_M} \cdot \mathbf{1}, \quad (2.37)$$

то есть индикаторная матрица \mathbf{J}_M системы Уолша \mathbf{M} может быть получена в результате инверсии столбцов матрицы, обратной матрице \mathbf{Q}_M .

Таблица 2.9. К соотношению матриц J и Q

Матрицы	Системы Уолша			
	P	H	W	C
J	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Разрешая уравнение (2.37) относительно Q_M , получим

$$Q_M = 1 \cdot \bar{J}_M. \quad (2.38)$$

Следовательно, к матрице Q_M приходим в результате инверсной перестановки строк матрицы \bar{J}_M , обратной индикаторной матрице J_M .

Для простоты и удобства обращения к матрицам назовем матрицу Q_M *первородной матрицей* системы Уолша, а пару матриц Q_M и J_M – *минимальными образующими матрицами* систем Уолша.

Матрица Q_M названа «первородной» на том основании, что элементарным способом матрица Q_M трансформируется в образующую матрицу G_M , с помощью которой в результате преобразования (2.35) восстанавливается система функций Уолша M . Выберем, для примера, из табл. 2.9 матрицу

$$Q_C = \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & 4 & & & \\ & k & & & \end{matrix} . \quad (2.39)$$

Выполним ряд пошаговых преобразований над матрицей Q_C .

Шаг 1. Дополнив столбцы 1 и 2 матрицы (2.39) нулевым столбцом, получим частично восстановленную образующую матрицу

$$\mathbf{G}'_C = 2 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 4 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ k \end{matrix} .$$

Шаг 2. Третий столбец матрицы \mathbf{G}_C находим в результате поэлементного сложения по модулю 2 столбцов 1 и 2 матрицы \mathbf{G}'_C . Тогда

$$\mathbf{G}''_C = 2 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ k \end{matrix} .$$

Шаг 3. Все последующие столбцы матрицы \mathbf{G}_C образуются в результате сложения по модулю 2 элементов столбцов матрицы (2.39), арифметическая сумма номеров которых составляет двоичный номер вычисляемого столбца. Обратим внимание на то, что в качестве слагаемых могут быть использованы только лишь номера столбцов матрицы \mathbf{G}''_C , являющиеся степенью двойки.

$$\mathbf{G}'''_C = 2 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ k \end{matrix} .$$

Из сопоставления правых частей соотношений (2.34) и \mathbf{G}'''_C убеждаемся в том, что действительно первородная функция восстанавливает образующую матрицу системы Уолша — Кули.

Для подтверждения равенства (2.37) выберем пару матриц, расположенных в колонке \mathbf{C} табл. 2.9. Пусть этими матрицами являются

$$\mathbf{J}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Матрица $\bar{\mathbf{Q}}_C$, обратная матрице \mathbf{Q}_C , имеет вид:

$$\bar{Q}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

в чем легко убедиться, вычислив произведение $(Q_C \cdot \bar{Q}_C)_2$, которое оказывается равным единичной матрице, как и должно быть.

Умножение матрицы \bar{Q}_M справа на матрицу инверсной перестановки 1 (или I), которая для матриц третьего порядка имеет вид

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

эквивалентно инверсии столбцов матрицы (2.41), т. е.

$$\bar{Q}_C \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Матрица (2.42) совпадает с индикаторной матрицей J_C системы Уолша — Кули в (2.40). Следовательно, равенство (2.27) соблюдается.

Перед тем как приступить к изложению алгоритмов синтеза систем Уолша с помощью индикаторных матриц, остановимся кратко на пояснении методов обращения этих матриц. Выберем из табл. 2.8 в качестве примера индикаторную матрицу под номером 18

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

отвечающей некоторой симметричной системе Уолша восьмого порядка.

Можно предложить, по крайней мере, два достаточно простых метода обращения матриц. Первый из них основан на том факте, что степени индикаторных матриц образуют циклическую группу r -го порядка, в которой $J^r \equiv E$, где E — единичная матрица. А из этого следует, что $(r-1)$ -я степень J является матрицей, обратной к индикаторной матрице.

Легко проверить, что порядок циклической группы, отвечающей матрице (2.43), равен семи. Таким образом, $(J^6)_2 = \bar{J}$, т. е.

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Второй метод обращения индикаторных матриц предполагает такие преобразования. Поставим формально в соответствие матрице J систему линейных уравнений

$$y = x \cdot J, \quad (2.45)$$

где $x = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$, $y = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0)$ – переменные преобразования.

Развернем систему (2.45) для матрицы (2.43).

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 + x_0; \\ y_1 &= x_2; \\ y_0 &= x_1 + x_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Умножим справа обе части равенства (2.45) на \bar{J} . Имеем

$$x = y \cdot \bar{J}. \quad (2.47)$$

Решая систему уравнений (2.46) относительно переменных x , то есть переходя к системе (2.47), при соблюдении правил двоичной модулярной арифметики, получим

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1; \\ x_1 &= y_2 + y_1 + y_0; \\ x_0 &= y_2 + y_1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Из сопоставления систем (2.46) и (2.48), или воспользовавшись мнемоническим правилом «строка в столбец» [5], приходим к выражению для \bar{J} , которое совпадает с матрицей (2.44), как и должно быть.

Обратимся теперь непосредственно к синтезу систем Уолша на основе индикаторных матриц, в качестве которой примем матрицу (2.43).

$$J = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (2.49)$$

Возможны два способа решения задачи. В первом, назовем его *прямым методом*, алгоритм синтеза разбивается на ряд последовательно выполняемых этапов (шагов).

Этап 1. Состоит в обращении индикаторной матрицы. Для выбранной матрицы (2.49) ее обратной является матрица (2.44).

$$\bar{J} = \underset{k}{2} \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.50)$$

Этап 2. В соответствии с формулой (2.38), инверсно переставляя строки обратной индикаторной матрицы (2.50), получим первоуродную матрицу Q . Имеем

$$Q = \underset{k}{2} \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.51)$$

Этап 3. На основании матрицы (2.51) ранее описанным способом приходим к образующей матрице G системы Уолша.

$$G = \underset{k}{2} \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \\ 1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (2.52)$$

Этап 4. Используя образующую матрицу (2.52), восстанавливаем систему Уолша, обозначив ее W_{18} .

$$\begin{array}{cc}
 & 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ t \\
 \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \cdot \\ \end{array} \\
 & \end{array} \quad (2.53)
 \end{array}$$

От бинарной формы матрицы (2.53) легко перейти к привычной в приложениях знаковой форме записи матриц систем Уолша. С этой целью достаточно произвести замену цифры 0 на знак +, а 1 заменить на знак -.

Назовем предложенный алгоритм синтеза систем функций Уолша W по заданной индикаторной матрице J *прямой задачей Уолша*. К *обратной задаче Уолша* будем относить алгоритм вычисления индикаторной матрицы J , соответствующей выбранной системе функций Уолша W . Решение «обратной задачи Уолша», естественно, состоит в последовательности шагов вычислений, обратных последовательности этапов, выполняемых при решении прямой задачи Уолша [16]. Пусть, для примера, W_N задана системой функций (2.53).

Этап 1. Находим порождающую матрицу G системы функций W согласно общему соотношению (2.29) и, тем самым, приходим к матрице (2.52).

Этап 2. Отбирая из матрицы (2.52) столбцы с номерами $t = 2^k$, $k = 0, 1, 2$, получим первоначальную матрицу Q (2.51)

Этап 3. Инверсно переставляя строки матрицы Q , получим матрицу \bar{J} (2.50), обратную индикаторной матрице J .

Этап 4. Обращая матрицу \bar{J} , находим индикаторную матрицу J (2.49), соответствующую заданной системе функций W , чем и завершается решение обратной задачи Уолша.

2.6.3. Метод обобщенных преобразований Грея

Как мы уже отмечали ранее, степени индикаторных матриц J систем Уолша W образуют циклические группы L -го порядка, причем $J^L = E$, где

E – единичная матрица, являющаяся индикаторной матрицей систем Уолша-Пэли. Индикаторные матрицы, как и матричные формы простых и симметричных составных кодов Грея являются правосторонне симметрическими. Это свидетельствует, во-первых, о глубокой взаимосвязи кодов Грея и индикаторных матриц систем Уолша. И, во-вторых, поскольку циклические группы (контуры), не являющиеся подгруппами групп более высокого порядка и отвечающие различным кодам Грея, содержат общий элемент E – идентификатор системы Уолша – Пэли, то о системах Уолша – Пэли можно говорить как о центральных (базовых) системах Уолша. В узлах контуров содержится индикаторные матрицы систем Уолша. Для систем Уолша восьмого порядка все 28 индикаторных матриц, соответствующих различным системам, оказываются *Пэли – связанными*, что наглядно иллюстрируется графом на рис. 2.13.

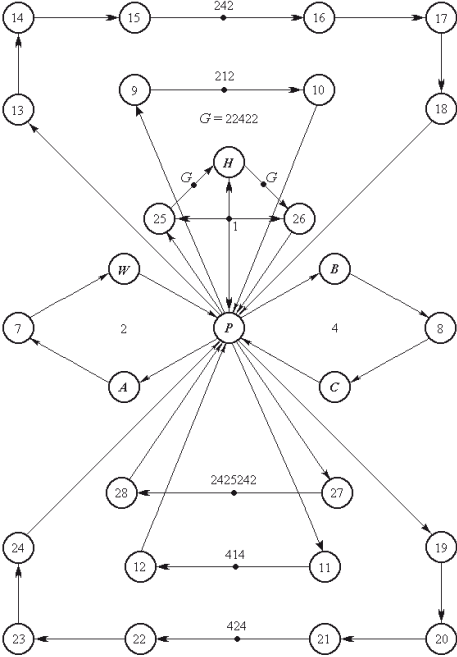


Рисунок 2.13. Полный ансамбль Пэли-связанных систем Уолша восьмого порядка

Большими латинскими буквами в узлах графа обозначены *инвариантные фундаментальные системы Уолша*, названные так на том основании, что алгоритм их синтеза не зависит от порядка N систем Уолша. Цифрами в узлах контуров обозначены порядковые номера систем, составляющих в совокупности с инвариантными системами полное множество систем Уолша восьмого порядка. Узлы дерева (рис. 2.13) систем Уолша связаны направленными ребрами, каждому из которых приписывается определенный вес. Веса ребер графа, являющиеся простыми или симметричными составными кодами Грея, устанавливают правила преобразования индикаторных матриц (узлов дерева) систем функций Уолша.

2.7. Фундаментальные системы функций Уолша

Во множестве симметричных систем Уолша особое положение занимает система Уолша — Пэли. Матрицу Пэли обоснованно можно назвать *центральной матрицей* дерева систем Уолша.

Введем определение фундаментальных систем Уолша.

Фундаментальными будем называть системы Уолша, которые образуются из системы функций Уолша — Пэли в результате перестановки строк матрицы Пэли базовыми кодами Грея.

На рис. 2.14 показано дерево фундаментальных симметричных систем Уолша восьмого порядка.

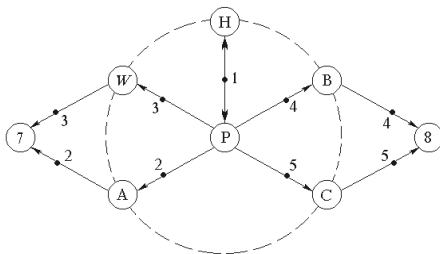


Рисунок 2.14. Граф фундаментальных систем Уолша восьмого порядка

Аналогичную форму имеет граф фундаментальных матриц Уолша 16-го порядка в силу того, что периоды циклов L базовых кодов Грея $G = 2, 5$ восьмого и 16-го порядков одинаковы и равны четырем.

Граф фундаментальных систем Уолша 32-го порядка отображен на рис. 2.15.

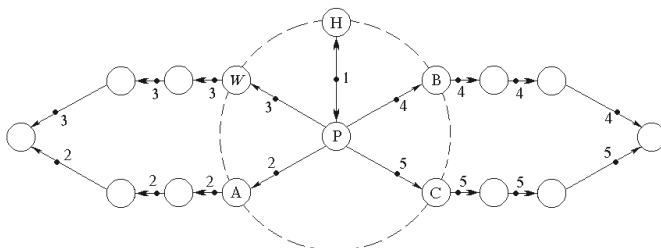


Рисунок 2.15. Граф фундаментальных систем Уолша 32-го порядка

На рис. 2.14 и 2.15 пунктирным кругом выделено подмножество фундаментальных систем, которые назовем *инвариантными фундаментальными симметричными системами* Уолша. Подмножество фундаментальных систем, не вошедших в группу инвариантных, назовем *вариабельными фундаментальными симметричными системами* Уолша.

Инвариантность здесь понимается в том смысле, что

структура базисных функций первого порядка и рекуррентные алгоритмы синтеза инвариантных матриц не зависят от порядка N матриц Уолша.

Вариабельные фундаментальные системы (матрицы) Уолша таким свойством не обладают. В группу инвариантных матриц входят рассмотренные в параграфах 2.2–2.5 матрицы P (Пэли), H (Адамара), W (Уолша) и C (Кули). Оставшиеся две инвариантные фундаментальные матрицы условно назовем матрицами A и B .

Матрица A образуется из матрицы P в результате перестановок ее строк по коду Грея левостороннему, т.е.

$$P \xrightarrow{\text{КГ}} A.$$

Матрица A восьмого порядка имеет вид

$$A_8 = \{a(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Базисная функция первого порядка $a(1, t)$ сохраняет структуру соответствующей базисной функции системы Уолша–Пэли, что дает возможность следующим образом записать начальные условия для рекуррентного алгоритма синтеза A – матриц Уолша:

$$a(0, n) = +, \quad t = \overline{0, N-1};$$

$$a(1, t) = \begin{cases} +, & t = \overline{0, \frac{N}{2}-1}; \\ -, & t = \overline{\frac{N}{2}, N-1}. \end{cases}$$

Левые половины четных строк A – матрицы образуются по правилу формирования четных строк матрицы Пэли, то есть

$$a(2k, t) = a(k, t), \quad k = \overline{1, \frac{N}{2}-1}; \quad t = \overline{0, \frac{N}{2}-1},$$

а правые половины четных строк либо повторяют левые половины, либо инверсны к ним. Нумерацию строк матрицы A примем начинающейся с нулевой, т.е. полагаем, что порядок базисной функции A – системы Уолша совпадает с номером строки A – матрицы.

Установление соотношений между правыми и левыми половинами строк A – матриц Уолша начнем с размера $N = 8$. Разумеется, что в нулевой строке (четная строка матрицы) правая половина строки повторяет левую половину. Этот факт обозначим символически знаком $+$. В следующих двух четных

строках (второй и четвертой) правые половины строк инверсны по отношению к левым половинам. Будем символически отображать инверсию знаком $-$. И, наконец, в шестой строке правая половина строки повторяет левую половину, что соответствует знаку $+$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \\ | & + & - & - & + | \end{array}$$

Для $N = 16$ соотношение правых и левых половин четных строк матрицы A можно символически отобразить следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \\ | & + & - & - & + | & - & | \end{array}, \quad (2.54)$$

которая в развернутой форме имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ | & + & - & - & + | & - & + & + & - | \end{array}$$

Знак минус после вертикальной прямой в выражении (2.54) означает инверсию всех знаков, стоящих слева от прямой.

Аналогичным образом можно расписать эти соотношения для матриц A любого порядка $N = 2^n$, где n – натуральное число:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \\ | & + & - & - & + | & - & | & \cdots & - & | & . \\ & & & & & 8 & 16 & & & N \end{array} \quad (2.55)$$

Базисные функции нечетных порядков, соответствующие матрице A , определяются выражением

$$a(2k+1, t) = a(2k, t) \cdot a(1, t).$$

Перейдем к синтезу рекуррентных формул для базисных функций системы функций Уолша, отмеченной на рис. 2.5 и 2.7 как система (матрица) B . Матрица B образуется из матрицы P в результате перестановок ее строк по коду Грея прямому правостороннему, т.е.

$$P \overset{\leftarrow}{\text{КГ}} \rightarrow B.$$

Для интервала $N = 8$ \mathbf{B} -матрица Уолша имеет вид:

$$\mathbf{B}_8 = \{b(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{array} \right] \end{matrix} .$$

Форма базисной функции первого порядка $b(1, t)$ в определенной мере подобна форме (2.55), а именно:

$$b(1, t) = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ + & - & - & + & | & - & | & - & | & \dots & - & | & . \end{matrix} \quad (2.56)$$

4 8 16 N

В частности, из выражения (2.56) следует, что для $N = 16$

$$b(1, t) = | + \quad - \quad - \quad + | \quad - \quad + \quad + \quad - | \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + | .$$

и т.д.

Алгоритм формирования четных базисных функций \mathbf{B} -систем Уолша повторяет алгоритм формирования четных функций системы Пэли, т. е.

$$b(2k, t) = b(k, (2t)_N),$$

а нечетные функции удовлетворяют соотношению

$$b(2k+1, t) = b(2k, t) \cdot b(1, t).$$

Обозначим через \mathbf{F} инвариантную фундаментальную матрицу N -го порядка и пусть $f(k, t)$, $k, t = \overline{0, N-1}$, — ее базисная функция k -го порядка. Для любой матрицы

$$\mathbf{F} \in \{\mathbf{P}, \mathbf{H}, \mathbf{W}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$$

ее нечетные базисные функции вычисляются по формуле

$$f(2k+1, t) = f(2k, t) \cdot f(1, t). \quad (2.57)$$

Выражения для базисных функций первого порядка (в том числе и в символической форме), определяющие начальные условия рекуррентных алгоритмов синтеза симметрических матриц Уолша, сведены в табл. 2.10.

Таблица 2.10. Образующие функции фундаментальных инвариантных систем Уолша

F	$f(1, t)$
P, A, W	$\begin{cases} +, & t = \overline{0, N/2-1}; \\ -, & t = \overline{N/2, N-1}. \end{cases}$
H	$\begin{cases} +, & \text{если } t - \text{четное}; \\ -, & \text{если } t - \text{нечетное}. \end{cases}$
C	$\begin{cases} +, & t = \overline{0, N/4-1}; \\ -, & t = \overline{N/4, 3N/4-1}; \\ +, & t = \overline{3N/4, N-1}; \end{cases}$
B	$b(1, t) = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & & \\ + & - & - & + & & - & & - & & \dots & - & \\ & & & & & 4 & & 8 & & 16 & & N \end{matrix}$

Рекуррентные формулы для базисных функций четного порядка инвариантных фундаментальных матриц Уолша приведены в табл. 2.11.

Таблица 2.11. К вычислению четных базисных функций

F	$f(2k, t), \quad k = \overline{1, \frac{N}{2}-1}$
P, B, C	$f(k, (2t)_N)$
H	$h(k, t)^{[1]}$
W	$w(k, 2t) \vee \begin{cases} w(k, 2t), & \text{если } k - \text{четное}; \\ \overline{w(k, 2t)}, & \text{если } k - \text{нечетное}. \end{cases}$
A	$a(k, 2n) \vee \begin{matrix} & 0 & 2 & 4 & 6 & & & & & & \\ + & - & - & + & & - & & \dots & - & \\ & & & & & 8 & & 16 & & N \end{matrix}$

Начальные условия, выписанные в табл. 2.10, выражение (2.57) и соотношения для базисных функций четного порядка (табл. 2.11) задают алгоритм прямого синтеза инвариантных фундаментальных матриц Уолша произвольного порядка $N = 2^n$, $n \geq 3$.

Таким образом, с помощью простых алгебраических преобразований Грея не только синтезированы все 28 симметрических систем функций Уолша восьмого порядка, но и установлены существующие между ними зависимости. Кроме того, на основании рис. 2.13 приходим к заключению, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 2.2. *Все системы Уолша восьмого порядка могут быть получены перестановкой базисных функций P -системы симметричными составными кодами Грея нечетных порядков.*

Впрочем, как подтвердили дальнейшие исследования, утверждение 2.2 справедливо также и для симметричных систем Уолша произвольного порядка, равного степени двойки.

2.8. Системы Уолша, порядок которых кратен четырем

Кроме систем функций Уолша порядка $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, отнесенных выше к подмножеству классических систем, существуют симметричные системы Уолша, порядок которых кратен четырем, и в тоже время отличен от степени двойки. Таковыми, например, являются порядки $N = 12, 20, 24$ и т. д. Для порядков N таких, что $N - 1 = p$, где p – простое число, известен достаточно простой метод построения симметрических матриц Уолша – метод Пэли [2]. Суть метода Пэли изложим на примере $N = 12$, для которого $N - 1 = 11$.

Рассмотрим поле вычетов Z_p по модулю p . Всякий элемент $z \in Z_p$, являющийся квадратом какого-либо элемента того же поля, называется *квадратичным вычетом*, всякий другой – *квадратичным невычетом*. Определим на поле Z_p функцию $\chi(z)$, называемую *символом Лежандра*:

$$\chi(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0; \\ 1, & \text{если } z - \text{квадратичный вычет}; \\ -1, & \text{если } z - \text{квадратичный невычет}. \end{cases}$$

Обратимся к табл. 2.12, в которой приведена последовательность вычисления квадратичных вычетов (1) и квадратичных невычетов (-1) элементов поля Z_{11} , сведенных в строчку $\chi(z)$.

Таблица 2.12. К вычислению квадратичных вычетов

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$(z^2)_{11}$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$\chi(z)$	0	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1

Как следует из строки $(z^2)_{11}$ табл. 2.12, повторяющиеся элементы $z=1, 3, 4, 5$ и 9 поля Z_{11} являются квадратичными вычетами, а оставшиеся элементы – квадратичными невычетами. Сбалансируем элементы строки $\chi(z)$ табл. 2.12, заменив 0 на -1. Суть «балансировки» будет уточнена несколько позже. Получим строчку $\tilde{\chi}(z)$, представленную в табл. 2.13. $(z^2)_{11}$

Таблица 2.13. Сбалансированные вычеты поля Z_{11}

$\tilde{\chi}(z)$	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
-------------------	----	---	----	---	---	---	----	----	----	---	----

Последовательно подвергая элементы строки $\tilde{\chi}(z)$ циклическому сдвигу на один разряд влево, составим симметричную квадратную таблицу 11-го порядка (табл. 2.14).

Таблица 2.14. Неполная симметричная таблица

-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1

Если дополнить табл. 2.14 верхней строкой и левым столбцом, во всех элементах которых вписаны цифры 1, и сохранить только знаки элементов

расширенной таблицы, то получим симметрическую матрицу Уолша 12-го порядка

$$W_{12} = \{w(k, t)\} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & - \\ + & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & + & - & - & + & - & - \\ + & + & + & - & - & - & + & - & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & - & + & - & - & + & - & + & + & + \\ + & - & - & - & + & - & - & + & - & + & + & + & + \\ + & - & - & + & - & - & + & - & + & + & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + & + & + & - & - & - \\ + & + & - & - & + & - & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & - & + & - & + & + & + & - & - & - & - & + \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

В отличие от матриц, отвечающих классическим системам Уолша, для симметрических матриц Уолша M , порядок N которых не является степенью двойки, не существует как образующих прямоугольных матриц G_M , так и соответствующих им первородных Q_M и индикаторных матриц J_M .

Однако, если известна хотя бы одна симметрическая матрица M Уолша порядка N , то все остальные симметрические матрицы этого же порядка могут быть вычислены по методу направленного перебора базисных функций матрицы M .

2.9. Алгоритмы БПФ в базисе функций Уолша

Матрицы преобразования систем функций Уолша можно получить из дерева БПФ в результате следующей аппроксимации фазовых множителей (ФМ) Ψ_N^k базиса ДЭФ.

Пусть $N = 8$. Расположение множителей Ψ_8^k на комплексной плоскости представлено на рис. 2.16. Нижней дугой на рисунке охвачена совокупность ФМ Ψ^k , $k = 0, 3$, которые используются на третьей ступени дерева БПФ в базисе ДЭФ с прореживанием по времени. Светлый кружочек, расположенный на оси абсцисс, охватывает фазовый множитель, который входит в указанную

совокупность, а стрелка дуги опирается на ФМ, который в данную совокупность не входит.

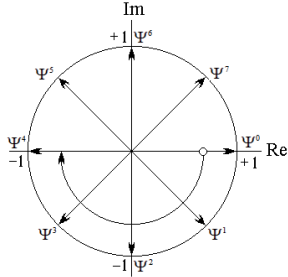


Рисунок 2.16. Фазовые множители базиса ДЭФ для восьмиточечного ДПФ

Сохраняя для наглядности положения векторов Ψ^k неизменными, аппроксимируем (заменяем) их значениями ± 1 так, как это показано на рис. 2.17.

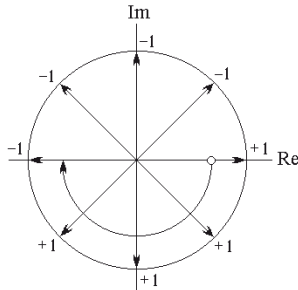


Рисунок 2.17. Аппроксимация фазовых множителей ДЭФ

Введем следующие обозначения для базовых двухточечных операций БПФ с прореживанием по времени (рис. 2.18) в базисе функций Уолша.

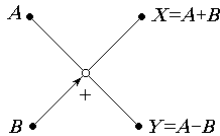


Рисунок 2.18. Операция “бабочка” дерева БПФ в базисе функций Уолша с прореживанием по времени

На основании аппроксимации фазовых множителей ДЭФ (рис. 2.17) и, используя обозначения базовой операции (рис. 2.18), приходим к дереву (рис. 2.19) БПФ с прореживанием по времени в базисе функций Уолша для $N = 8$.

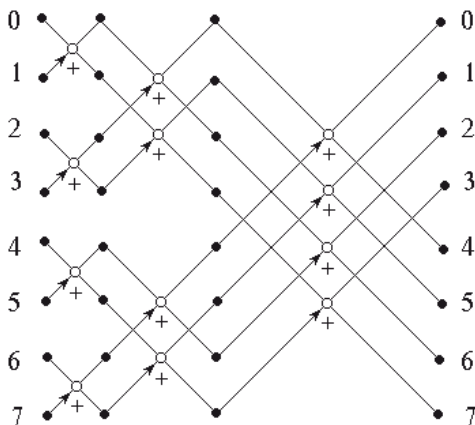


Рисунок 2.19. Дерево восьмиточечного БПФ с прореживанием по времени в базисе функций Уолша

Цифрами слева и справа дерева преобразования обозначены номера входных и выходных каналов процессора БПФ соответственно. Предположим, что на вход процессора подведена последовательность дискретных сигналов, в которой номера отсчетов сигнала t совпадают с номерами входных каналов процессора.

В результате обработки сигналов в соответствии с базовой операцией, показанной на рис. 2.18, приходим к матрице Уолша — Адамара (2.4). Если же номера входных сигналов подвергнуть двоично-инверсной перестановке, то получим матрицу Уолша — Пэли (2.9). Далее, если номера отсчетов сигнала на входе процессора БПФ сначала подвергнуть двоичной инверсии, а затем переставить в соответствии с обратным кодом Грея левосторонним, то образуется матрица Уолша — Качмажа (2.12). И, наконец, если номера отсчетов сигнала на входе процессора ДПФ переставить сначала по закону двоичной инверсии, а затем по обратному коду Грея правостороннему, то приходим к матрице Уолша — Кули (2.13).

Описанная система перестановок отсчетов дискретного сигнала на входе процессора БПФ сведена в табл. 2.15.

Таблица 2.15. Схема перестановок номеров отсчетов входного сигнала

k_h	0	1	2	3	4	5	6	7
k_p	0	4	2	6	1	5	3	7
k_ω	0	7	3	4	1	6	2	3
k_c	0	4	6	2	7	3	1	5

Итак, можно прийти к заключению о том, что, сохраняя неизменными веса ребер дерева БПФ и подвергая особым перестановкам отсчеты входного сигнала, можно получить различные матрицы преобразования.

С другой стороны, к различным матрицам преобразования приходим, сохраняя неизменным порядок расстановки входных сигналов, но меняя весовые коэффициенты ребер дерева БПФ. Обратимся к рис. 2.17. Отметим, что вряд ли можно признать удачной аппроксимацию фазовых множителей, которая предлагается данным графом. Более подходящей является аппроксимация, которая показана на рис. 2.20.

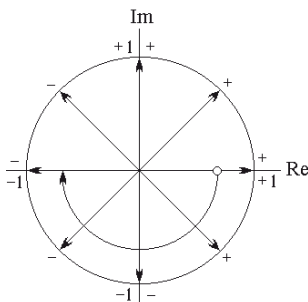


Рисунок 2.20. Модифицированная аппроксимация фазовых множителей ДЭФ

К такой аппроксимации приходим, развернув фазовые множители, представленные на рис. 2.17, на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Предлагаемая аппроксимация с инженерной точки зрения более приемлемая, поскольку здесь векторы, расположенные в правой (положительной) половине комплексной плоскости заменяются значениями $+1$, а в левой (отрицательной) половине — значениями -1 .

Согласно рис. 2.20 составим табл. 2.16 фазовых множителей для трех ступеней дерева восьмиточечного БПФ.

Таблица 2.16. Распределение фазовых множителей восьмиточечного дерева БПФ

Номер ступени преобразования	Набор ФМ
3	+ + - -
2	+ -
1	+

Сохраняя, как и для преобразования Уолша — Пэли, двоично-инверсную перестановку сигналов на входе процессора восьмиточечного БПФ и выбрав веса ребер дерева такими, какие указаны в табл. 2.16, приходим к структуре дерева преобразования, показанному на рис. 2.21.

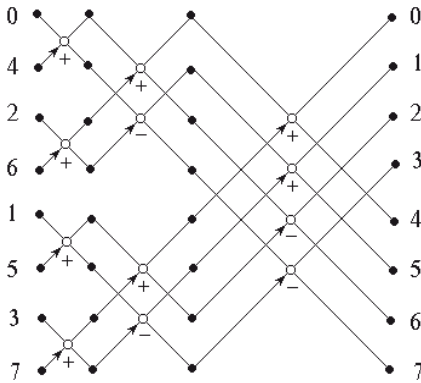


Рисунок 2.21. Алгоритм БПФ с модифицированными весами ребер дерева преобразования

Матрица преобразования, соответствующая алгоритму БПФ, отображенному на рис. 2.21, совпадает с матрицей Уолша — Кули. Эта матрица и была получена [13] впервые на основании классического алгоритма БПФ по схеме Кули — Тьюки [45] и поэтому названа матрицей Уолша — Кули.

В общем случае для получения системы преобразования Уолша — Кули N -го порядка веса ребер ω последней ступени дерева БПФ следует расставлять по правилу:

$$\omega_i = \begin{cases} +, & i = 0, \frac{N}{4} - 1; \\ -, & i = \frac{N}{4}, \frac{N}{4} - 1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Следовательно, к системе функций Уолша — Кули можно прийти такими двумя способами. Во-первых, можно подвергнуть обратному кодированию по Грею правостороннему номера отсчетов входного сигнала, соответствующие преобразованию Уолша — Пэли (при этом веса всех ребер дерева БПФ полагаются равными +1). Или, во-вторых, сохраняя, как и в преобразовании Пэли, двоично-инверсную перестановку сигналов на входе процессора БПФ, веса ребер последней ступени дерева БПФ расставить в соответствии с соотношением (2.58). Веса ребер предыдущих ступеней преобразования берутся с прореживанием на два. В обоих случаях приходим к одинаковому результату, т. е. получим матрицу Уолша—Кули.

По всем вопросам убедительные доказательства открываются нами лишь тогда, когда мы и без того достаточно убеждены в истинности доказываемого

И. Этвес



3. СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦИЙ

Понятие системы Виленкина — Крестенсона функций (ВКФ) охватывает в качестве частных случаев также две широко распространенные системы, а именно, системы функций Уолша, основанные на арифметике с двоичным основанием счисления (двоичной арифметике), и системы дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), основанные на m -ичной, $m \geq 2$, арифметике. Системы ДЭФ и функций Уолша рассмотрены в предыдущих двух разделах монографии. Эти системы и их приложения к теории сигналов и цепей в последнее время интенсивно изучаются, однако, как правило, фрагментарно и изолировано одна от другой.

ВКФ были введены и подробно исследованы Виленкиным [24] и Крестенсоном [44] в континуальном варианте, опираясь на которые авторы замечательной монографии [40] развили их применительно к пространству дискретных сигналов на конечных интервалах и тем самым приоткрыли дорогу успешного применения ВКФ в цифровых системах обработки сигналов и изображений.

3.1. Общие сведения

Системы ВКФ представляют собой комплекснозначные симметрические квадратные матрицы N -го порядка, $N = m^n$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, которые могут быть получены в результате допустимых перестановок строк матриц ВКФ — Кронекера [21]. Матрицы систем ВКФ-Кронекера, будем обозначать их $H_{m,n}$, являются n -й кронекеровской степенью матриц ДЭФ m -го порядка E_m , т. е.

$$H_{m,n} = E_m^{[n]},$$

где m — основание системы счисления (модуль); n — показатель кронекеровской степени, совпадающий с порядком *индикаторных матриц систем ВКФ*, определение которых будут даны ниже.

Рассмотрим два крайних случая. Очевидно что, во-первых, если $n=1$, то матрицы ВКФ — Кронекера совпадают с матрицами ДЭФ порядка $N = m$. И, во-вторых, при $m=2$ матрицы ВКФ — Кронекера становятся матрицами Адамара порядка $N = 2^n$, а системы ВКФ — Кронекера переходят в системы Уолша — Адамара. Варианты систем ВКФ показаны на рис. 3.1.

		Степень n					
		1	2	3	4	5	6
Модуль m	2	Функции Уолша					
	3						
	4						
	5			В	К	Ф	
	6						

Рисунок 3.1. Области определения систем ВКФ и их частные случаи

Различные системы ВКФ могут отличаться друг от друга интервалом определения N , модулем m и способом расположения (нумерации) базисных функций в системе. В данном разделе изучаются исключительно симметричные системы ВКФ, для которых введем обозначение $V_{m,n}$. Каждая такая система состоит из полного набора ортогональных мультипликативных функций. Симметричные системы ВКФ могут быть использованы в качестве базиса ДПФ для N -выборочной совокупности дискретных сигналов $x(t)$, $t = \overline{0, N-1}$.

Функции систем ВКФ — Кронекера наследуют основные свойства функций систем Уолша — Адамара. Различие между ними состоит в основании систем счисления элементов, из которых составляются матрицы Адамара и ВКФ — Кронекера (для матриц Адамара — это двоичная система, а для ВКФ — Кронекера — m -ичная система, причем $m \geq 3$).

Следует отметить, что поскольку в системе ДЭФ m -го порядка, $m \geq 3$, существует несколько симметрических матриц (причем, их число четное), то каждой из них соответствует своя симметрическая матрица ВКФ — Кронекера. Если строки матриц ВКФ — Кронекера $H_{m,n}$ переставить по закону m -ичной инверсии их номеров, то вновь образованная матрица будет отвечать системе, которую назовем *системой ВКФ — Пэли* и будем обозначать $P_{m,n}$. В свою очередь, если строки матрицы ВКФ — Пэли переставить по элементарным кодам Грея, то приходим к совокупности инвариантных фундаментальных систем ВКФ (рис. 3.2.).

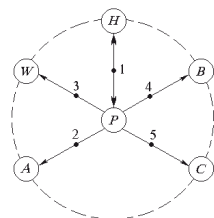


Рисунок 3.2. Граф инвариантных фундаментальных систем ВКФ

По аналогии с уже принятыми в разделе 1 названиями систем Уолша, дадим соответствующие названия инвариантным фундаментальным ВКФ системам, а именно: P — *система ВКФ — Пэли*, W — *система ВКФ — Уолша*, C — *система ВКФ — Кули*, а узлы A и B будем называть A -ВКФ и B -ВКФ системами. В связи с этим, представляется целесообразным назвать систему ВКФ-Кронекера H *системой ВКФ — Адамара*.

Отметим, что на рис. 3.2 отображен граф инвариантных фундаментальных систем ВКФ, отвечающих одной из матриц $E_m^{(i)}$ систем ДЭФ (материнской, когда $i=1$, и сестринской, если $i \geq 2$) с фиксированным значением m . Естественно, что каждой матрице $E_m^{(i)}$ соответствует свой граф, аналогичный тому, который представлен на рис. 3.2. Более подробная характеристика систем ВКФ, включая алгоритмы синтеза фундаментальных систем, содержится в последующих частях раздела.

3.2. Оценка числа симметричных систем ВКФ

Перейдем к обсуждению вопроса, касающегося оценки числа симметричных систем ВКФ порядка $N = m^n$, обозначив его (число) $L_{m,n}$. Ранее в разделах 1 и 2 были приведены оценки $L_{m,1}$ числа симметричных систем ДЭФ

$$L_{m,1} = \varphi(m), \quad (3.1)$$

где $\varphi(m)$ – функция Эйлера, равная количеству чисел из множества $\{1, 2, \dots, m-1\}$ взаимно простых с m , и числа $L_{2,n}$ симметричных систем Уолша

$$L_{2,n} = \prod_{i=1}^n (2^i - \text{mod}(i, 2)). \quad (3.2)$$

В статье [30] получена оценка числа систем ВКФ для $n = 2$

$$L_{m,2} = L_{m,1} \cdot m^2 = \varphi(m) \cdot m^2. \quad (3.3)$$

Аналитические оценки $L_{m,n}$ для параметра $n \geq 3$ к настоящему времени, насколько известно автору монографии, еще не получены. Решению указанной проблемы как раз и посвящен материал данного параграфа раздела.

Способ получения значений $L_{m,n}$ для произвольного модуля m и степени n основан на использовании *индикаторных матриц* систем ВКФ, определение которых приводится ниже.

Определение 3.1. *Индикаторными матрицами систем ВКФ порядка $N = m^n$ будем называть такие невырожденные в кольце вычетов по модулю m квадратные n -го порядка матрицы \mathbf{J} с элементами, принадлежащими множеству $Z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, с помощью которых устанавливается однозначное соответствие*

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}\mathbf{J})_m$$

между номером $\mathbf{x} \in \overline{0, N-1}$ строки матрицы ВКФ — Пэли и номером строки \mathbf{y} системы $V_{m,n}$, в которую перемещается строка матрицы ВКФ — Пэли.

Следовательно, как и для систем функций Уолша

индикаторные матрицы систем ВКФ являются невырожденными правосторонне симметрическими матрицами, а их определитель Δ есть положительное число, не превышающее m , причем Δ и m должны быть взаимно простыми числами.

Если окажется, что определитель Δ ИМ равен отрицательному числу, например, $\Delta = -\nabla$, то согласно правилам модульной арифметики от $-\nabla$ можно перейти к положительному $\Delta = (m - (\nabla)_m)_m$.

Таким образом, имеем возможность сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Квадратная матрица \mathbf{J} n -го порядка, элементы которой принадлежат ряду $[0, m-1]$, где m – основание системы счисления (модуль), является индикаторной матрицей симметричной системы ВКФ $V_{m,n}$ в том и только лишь в том случае, если матрица \mathbf{J} – правосторонне симметрическая (необходимое условие), а ее определитель Δ и модуль m – взаимно простые числа (достаточное условие).*

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве необходимых и достаточных условий для индикаторных матриц систем ВКФ, поскольку они совпадают с необходимыми и достаточными условиями для ИМ рассмотренных в разделе 1 систем Уолша, являющихся частным случаем систем ВКФ.

Рассчитанные на компьютере на основании ИМ оценки $L_{m,n}$ числа симметричных систем ВКФ для ряда значений m и n приведены в табл. 3.1. Нижняя граница значений $L_{m,n}$, полученных по нижеприводимым формулам, отмечена в таблице двойными линиями.

Таблица 3.1. Число симметричных систем ВКФ

m	Значение параметра n				
	1	2	3	4	5
2	1	4	28	448	13.888
3	2	18	468	37.908	9.173.736
4	2	32	1.792	458.752	455.081.984
5	4	100	12.400	7.750.000	24.211.000.000
6	2	72	13.104	16.982.784	127.404.845.568
7	6	294	100.548	241.415.748	4.057.233.060.888
8	4	256	114.688	469.762.048	14.912.126.451.712
9	6	486	341.172	2.238.429.492	131.633.084.706.552
10	4	400	347.200	3.472.000.000	336.242.368.000.000
11	10	1210	1.609.30	23.560.152.000	–

Из анализа данных табл. 3.1 по индукции можно прийти к таким оценкам числа симметричных систем ВКФ:

– если m – простое число, то

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=2}^n (m^i - \text{mod}(i, 2)), \quad (3.4)$$

причем

$$L_{m,1} = \varphi(m);$$

– если m – степень простого основания m_1 , т.е.

$$m = m_1^k,$$

то

$$\frac{L_{m_1^{k+1},n}}{L_{m_1^k,n}} = m_1^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Следовательно,

$$L_{m_1^{k+1},n} = L_{m_1^k,n} m_1^{\frac{n(n+1)}{2}}; \quad (3.5)$$

и, наконец, если m – составное число такое, что

$$m = \prod_{i=1}^l m_i^{k_i},$$

в котором m_i – простое число, то

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=1}^l L_{m_i^{k_i},n}. \quad (3.6)$$

Формулы (3.1)–(3.3), полученные в [30], являются частными случаями соотношений (3.4)–(3.6). Результаты расчета $L_{m,n}$ по формуле (3.6) для ряда значений параметров m и n приведены в нижней правой части табл. 3.1.

Метод индикаторных матриц, применявшийся для решения задач синтеза и оценки числа симметричных систем Виленкина — Крестенсона функций, оказался весьма продуктивным по ряду причин. Остановимся на некоторых интересных особенностях индикаторных матриц.

Во-первых, ИМ дают возможность компактно отображать матрицы ВКФ больших размеров. Порядок матриц ВКФ растет по экспоненциальному закону в зависимости от степени n , в то время как порядок ИМ всего лишь прямо пропорционален n . Например, если $m=10$ и $n=4$, то порядок матриц ВКФ

$V_{10,4}$ составляет 10000, в то время как индикаторные матрицы этих систем сохраняют размерность, равную четырем.

Во-вторых, аппарат индикаторных матриц позволил успешно справиться с рядом проблем, для которых до настоящего времени классическая математика не предложила регулярных алгоритмов их разрешения. В частности, с помощью ИМ удалось найти не только аналитические оценки числа $L_{m,n}$ симметричных систем ВКФ для произвольных значений параметров m и n , но и получить ответы на вопросы относительно *структур* (последовательностей расположения базисных функций в матрицах ВКФ) и взаимосвязей систем, о чем более подробно речь пойдет в последующих частях раздела.

3.3. Системы ВКФ $V_{3,2}$

Для модуля $m = 3$ существует всего лишь две симметричные системы ДЭФ, а именно, основная (материнская)

$$E_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

и вспомогательная (дочерняя)

$$E_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Матрицы (3.7) и (3.8) записаны в форме изоморфных отображений (с минимальными фазами для соответствующих матриц преобразований в пространстве оригиналов). Эти матрицы взаимосвязаны (рис. 3.3) оператором $X2$ (оператором умножения на два).

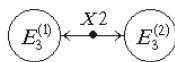


Рисунок 3.3. Граф взаимосвязи систем ДЭФ третьего порядка

Граф, показанный на рис. 3.3, означает, что элементы матрицы $E_3^{(2)}$ в пространстве отображений образуются из элементов матрицы $E_3^{(1)}$ в результате умножения их на 2 по модулю $m=3$ и наоборот. Из матриц (3.7) и (3.8) кронекеровским произведением n -й степени можно сформировать фундаментальные системы ВКФ — Кронекера $H_{3,m}^{(i)}$, $i=1, 2$.

Положим $n=2$ и выпишем выражения для фундаментальных инвариантных систем ВКФ $V_{3,2}$, отвечающих материнской системе ДЭФ $E_3^{(1)}$, заданной формулой (3.7). Система ВКФ — Адамара $H_{3,2}^{(1)}$ образуется как вторая кронекеровская степень матрицы $E_3^{(1)}$, то есть

$$H_{3,2}^{(1)} = E_3^{[2]} = E_3^{(1)} \times E_3^{(1)}.$$

В пространстве изоморфного отображения матриц ДЭФ операция кронекеровского умножения заменяется операцией сложения значений элементов матриц по модулю m (в рассматриваемом варианте $m=3$). Следовательно

$$H_{3,2}^{(1)} = h_{3,2}^{(1)}(k, t) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \end{array} \right] \end{matrix} . \quad (3.9)$$

Если строки матрицы ВКФ — Адамара (3.9) переставить по закону троичной инверсии их номеров, то получим матрицу ВКФ — Пэли

$$\mathbf{P}_{3,2}^{(1)} = p_{3,2}^{(1)}(k, t) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (3.10)$$

k

Матрица ВКФ — Пэли (3.10) служит основой для составления матриц оставшихся фундаментальных инвариантных систем ВКФ (Уолша, Кули, а также A и B систем). Эти матрицы можно получить, переставляя строки матрицы (3.10) по законам преобразования их номеров в соответствии с элементарными операторами Грея.

Способ формирования двухразрядных кодов Грея левосторонних в троичной системе счисления показан на рис. 3.4.

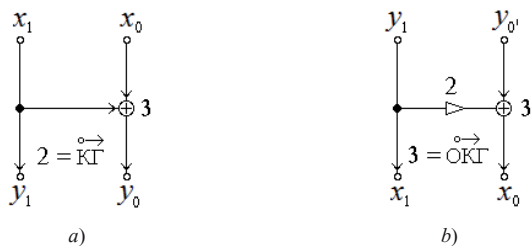


Рисунок 3.4. Оператор левостороннего преобразования Грея двухразрядных троичных чисел:

a) – прямое преобразование; *b)* – обратное преобразование

Правостороннее преобразование представлено на рис. 3.5.

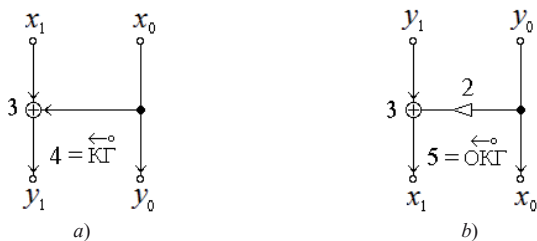


Рисунок 3.5. Оператор правостороннего преобразования Грея двухразрядных троичных чисел:

a) – прямое преобразование; b) – обратное преобразование

Алгоритм формирования оставшихся инвариантных фундаментальных систем ВКФ $V_{3,2}$, отвечающих материнской системе $H_{3,2}^{(1)}$, т. е. систем A , B , C и W , представлен в табл. 3.2. В первом столбце этой таблицы указаны десятичные номера строк базисных функций (начиная с нулевой) системы ВКФ — Пэли, а во второй – их двухразрядный троичный эквивалент. В столбцах 2–5 табл. 3.2 размещены кодовые комбинации после преобразования чисел из второй колонки соответствующими кодами Грея. То есть в столбце 2 даются троичные двухразрядные значения номеров строк, образованных прямым троичным преобразованием Грея чисел второй колонки таблицы; в столбце 3 – обратным левосторонним кодом Грея и т. д. Правило перестановок строк матриц ВКФ — Пэли с целью получения номеров строк в системах A , W , B и C отображается последними четырьмя столбцами таблицы.

Таблица 3.2. К вычислению фундаментальных систем $V_{3,2}$

Десятичное число	Троичное число	Преобразование по кодам Грея				Десятичный номер строки матрицы			
		2	3	4	5	A	W	B	C
0	00	00	00	00	00	0	0	0	0
1	01	01	01	11	21	1	1	4	7
2	02	02	02	22	12	2	2	8	5
3	10	11	12	10	10	4	5	3	3
4	11	12	10	21	01	5	3	7	1
5	12	10	11	02	22	3	4	2	8
6	20	22	21	20	20	8	7	6	6
7	21	20	22	01	11	6	8	1	4
8	22	21	20	12	02	7	6	5	2

На основании матрицы (3.10) и колонки A табл. 3.2 приходим к матрице

$$\begin{matrix}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & = & \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \end{matrix} & . & & (3.11) \\
 & & k & & & & & & & & &
 \end{matrix}$$

Перед прямой скобкой в правой части системы (3.11) указаны номера строк (базисных функций) матрицы ВКФ-Пэли (3.10).

Матрицы ВКФ — Уолша $W_{3,2}^{(1)}$ и B — ВКФ имеют вид:

$$\begin{matrix}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{matrix} & = & \begin{matrix} \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ \end{matrix} & ; & & \\
 & & k & & & & & & & & &
 \end{matrix}$$

$$\mathbf{B}_{3,2}^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\ 0 & [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ 4 & [0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 &] \\ 8 & [0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 &] \\ 3 & [0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 &] \\ 7 & [0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 &] \\ 2 & [0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 &] \\ 6 & [0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 &] \\ 1 & [0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 &] \\ 5 & [0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 &] \end{matrix}$$

k

И, наконец, составим матрицу ВКФ — Кули:

$$\mathbf{C}_{3,2}^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\ 0 & [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ 7 & [0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 &] \\ 5 & [0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 &] \\ 3 & [0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 &] \\ 1 & [0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 &] \\ 8 & [0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 &] \\ 6 & [0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 &] \\ 4 & [0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 &] \\ 2 & [0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 &] \end{matrix}$$

k

Аналогичным образом решается задача синтеза матриц фундаментальных систем ВКФ, отвечающих дочерней матрице ДЭФ $\mathbf{E}_3^{(2)}$, заданной соотношением (3.8). В частности, вторая кронекеровская степень матрицы (3.8) определяет матрицу ВКФ — Адамара:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\
0 & \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 &
\end{array} \right] \\
k
\end{array}
\end{array}
. \quad (3.12)$$

Переставив строки матрицы ВКФ — Адамара (3.12) по закону троичной инверсии их номеров, приходим к матрице ВКФ — Пэли:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & t \\
0 & \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \\
0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 &
\end{array} \right] \\
k
\end{array}
\end{array}
. \quad (3.13)$$

Воспользовавшись данными, которые приведены в последних четырех колонках табл. 3.2, легко можно получить структурные формы оставшихся четырех фундаментальных систем ВКФ второй группы.

Из сопоставления матриц (3.9) и (3.12), а также матриц (3.10) и (3.13) убеждаемся в том, что элементы этих матриц связаны оператором X_2 (эквивалентным оператору умножения на 2), причем результат произведения берется по модулю $m=3$. Этим же оператором X_2 связаны попарно элементы всех остальных матриц ВКФ систем A , B , C и W .

Матричная форма оператора X_2 совпадает с формой единичной матрицы, в которой на главной диагонали вместо единиц стоят двойки. Индикаторная матрица оператора X_2 совпадает с индикаторной матрицей системы ВКФ–Пэли P_2 , то есть

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, множество симметричных систем ВКФ $V_{3,2}$ включает две группы матриц, каждая из которых содержит по шесть фундаментальных инвариантных систем (рис. 3.6).

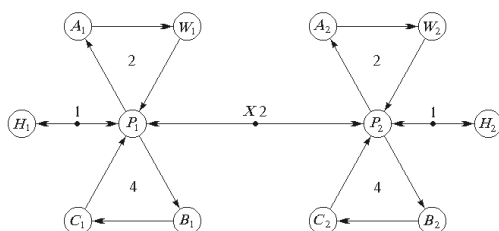


Рисунок 3.6. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{3,2}$

На рис. 3.6 индексами 1 и 2 обозначены системы ВКФ, входящие в группы, порождающими для которых являются материнская $E_3^{(1)}$ и дочерняя $E_3^{(2)}$ матрицы ДЭФ соответственно. Как следует из табл. 3.1, всего существует 18 симметричных систем ВКФ $V_{3,2}$, двенадцать из которых вошли в состав двух групп фундаментальных систем (рис. 3.6). Оставшиеся шесть систем являются компонентами (узлами) контура 212, в качестве опорной для которого может быть принята любая из матриц ВКФ–Пэли (рис. 3.7).

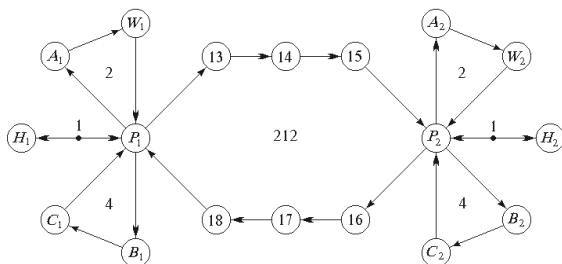


Рисунок 3.7. Полный граф симметричных систем ВКФ $V_{3,2}$

Индикаторные матрицы J фундаментальных систем ВКФ $V_{3,2}$ представляют собой правосторонне симметрические матрицы второго порядка и легко могут быть получены из единичной матрицы в результате ее преобразования по элементарным кодам Грея (табл. 3.3).

Таблица 3.3. Индикаторные матрицы фундаментальных систем $V_{3,2}$

Номер группы	Фундаментальные системы					
	P	H	A	W	B	C
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
	2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Индикаторные матрицы, соответствующие симметричным системам ВКФ $V_{3,2}$, обозначенные на рис. 3.7 под номерами 13–18, сведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4. Индикаторные матрицы узлов 13-18 систем $V_{3,2}$

Номер узла	13	14	15
Индикаторная матрица	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
Номер узла	16	17	18

Полные множества индикаторных матриц симметричных систем ВКФ $V_{3,2}$ и $V_{3,3}$ приведены в Приложениях 2 и 3 соответственно.

3.4. Системы ВКФ $V_{4,2}$

Основу построения симметричных систем ВКФ $V_{4,2}$ составляют две симметричные системы (матрицы) ДЭФ четвертого порядка, первая из которых $E_4^{(1)}$ является материнской, а вторая $E_4^{(2)}$ – дочерней:

$$E_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14); \quad E_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Матрицы (3.14) и (3.15) представлены канонической формой в изоморфном отображении. В пространстве оригиналов им соответствуют матрицы ДЭФ с минимальными фазами. Системы $E_4^{(1)}$ и $E_4^{(2)}$ взаимосвязаны оператором ХЗ по модулю $m=4$. Оператор ХЗ представляет собою квадратную матрицу четвертого порядка, элементы главной диагонали которой равны 3, а остальные нулю.

Вторые кронекеровские степени матриц $E_4^{(1)}$ и $E_4^{(2)}$ образуют симметричные системы ВКФ — Адамара H_1 и H_3 соответственно. При этом следует иметь в виду, что в пространстве изоморфного отображения, в котором представлены системы ДЭФ, кронекеровское произведение элементов перемножаемых матриц заменяется операцией сложения этих элементов по модулю $m=4$.

Следя приведенному алгоритму, составим матрицу ВКФ — Адамара H_1 16-го порядка.

$$H_1 = \begin{matrix}
 \begin{matrix}
 00 \\
 01 \\
 02 \\
 03 \\
 \\
 10 \\
 11 \\
 12 \\
 13 \\
 \\
 20 \\
 21 \\
 22 \\
 23 \\
 \\
 30 \\
 31 \\
 32 \\
 33 \\
 \\
 k
 \end{matrix}
 &
 \left[
 \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\
 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2
 \end{array}
 \right]
 \end{matrix}$$

Аналогичным образом может быть получена матрица H_3 . Номер k базисной функции системы ВКФ — Адамара H_1 записан слева от матрицы H_1 в виде четверичного двухразрядного числа. Переставив номера строк матрицы ВКФ — Адамара по закону m -ичной инверсии, получим матрицу системы ВКФ — Пэли. Вполне очевидно, что множество систем ВКФ $V_{3,2}$ содержит также две системы Пэли (P_1 и P_3 соответственно). Элементы этих систем, как и систем ВКФ — Адамара, связаны оператором X_3 .

Естественно, что оперировать исходными матрицами 16-го порядка затруднительно (да и нет в этом необходимости), поскольку каждой системе ВКФ $V_{4,2}$ 16-го порядка соответствует единственная индикаторная матрица второго порядка.

Полная таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{4,2}$ приведена в Приложении 4. Элементами этих матриц являются числа 0, 1, 2, 3. В частности, индикаторными матрицами систем ВКФ — Пэли P_1 и P_3 (обозначим их J_1 и J_3 соответственно) являются диагональные матрицы

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Период цикла L_g элементарных операторов Грея $g = \overline{2, 5}$ в пространстве параметров $m = 4$ и $n = 2$ равен четырем. В этом легко убедиться, последовательно преобразуя, например, строки матрицы J_1 по коду $g = 2$.

Полученная оценка L_g однозначно определяет структуру графа фундаментальных систем $V_{4,2}$ (рис. 3.8).

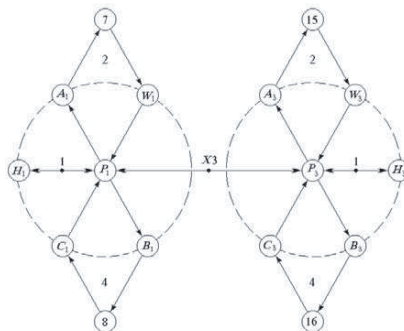


Рисунок 3.8. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{4,2}$ (1–16)

Согласно оценкам (3.3) или (3.5) для $m=4$ и $n=2$ всего существует 32 симметричные системы $V_{4,2}$. Таким образом, из общего числа симметричных систем ВКФ $V_{4,2}$ половину составляют фундаментальные системы. Симметричные составные коды Грея третьего порядка с ядром $\omega=1$, которому соответствуют коды 212 и 414, а также коды 242 и 252 совместно образуют двенадцать новых узлов (систем $V_{4,2}$), показанных на рис. 3.9.

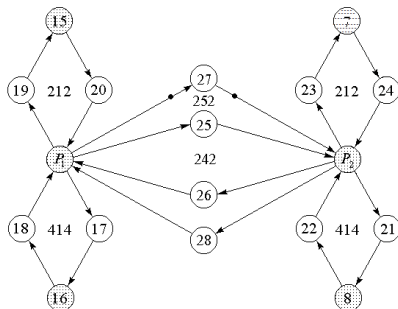


Рисунок 3.9. Расширение 1 систем ВКФ $V_{4,2}$ (17–28)

Точечной штриховкой на рис. 3.9 и далее отмечены системы ВКФ, входившие ранее в другие контуры.

Обратим внимание на то, что на рис. 3.9 отсутствуют контуры третьего порядка 424 и 434. Это объясняется тем, что составные коды Грея 424 и 434 являются обратными по отношению к кодам 242 и 252 соответственно

$$\begin{aligned} 424 \cdot 242 &= e; \\ 434 \cdot 252 &= e, \end{aligned} \tag{3.16}$$

то есть для параметров $m=4$ и $n=2$ составные коды Грея 424 и 434 являются как сопряженными, так и обратными кодам 242 и 252.

Систему равенств (3.16) легко проверить непосредственно. Для этого достаточно (в первом варианте) строки единичной матрицы второго порядка подвергнуть цепочке преобразований по кодам Грея, выписанным в левых частях равенств (3.16). Второй вариант проверки корректности данных уравнений состоит в следующем. Перемножим матрицу

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

отвечающую составному коду 424, на сопряженную ей матрицу

$$J^* = J^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

соответствующую коду 242, получим единичную матрицу

$$(J \cdot J^*)_4 = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что отражено условием первого уравнения (3.17). Аналогичным образом проверяется и второе равенство. Напомним, что при выполнении указанной операции матричного умножения каждый элемент матрицы произведения должен быть приведен к остатку по модулю 4.

Единственным составным кодом Грея пятого порядка, формирующим новые индикаторные матрицы систем $V_{4,2}$, не вошедшие в состав ранее полученных 28 систем, является код

$$G = 22122, \tag{3.17}$$

которому отвечает индикаторная матрица

$$J_{29} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

– относительно системы P_1 и матрица

$$J_{30} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

– относительно системы P_3 .

Матрицы (3.18) и (3.19) связаны соотношением, представленным на рис. 3.10.

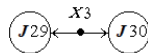


Рисунок 3.10. Граф взаимосвязи индикаторных матриц J_{29} и J_{30}

Узлы, образуемые составным кодом (3.17), показаны на рис. 3.11.

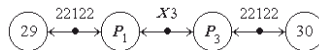


Рисунок 3.11. Расширение 2 систем $V_{4,2}$ (29–30)

Оставшиеся индикаторные матрицы систем $V_{4,2}$

$$\mathbf{J}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20); \quad \mathbf{J}_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

связаны оператором X_3 .

Легко убедиться в том, что никакой симметричный составной код не отвечает индикаторным матрицам (3.20) или (3.21). Обратим внимание также на то, что матрицы (3.18)–(3.21) являются дважды симметрическими, причем

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

в равной степени, как и

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{I} – индикаторная матрица, отвечающая оператору инверсной перестановки, для которой ранее введено цифровое обозначение 1.

Из сопоставления соотношений (3.17), (3.18), (3.20) и (3.22) следует, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \circ \rightarrow (22122) \cdot 1 = 1 \cdot (22122). \quad (3.23)$$

Соответствия (3.23) означают, что недостающая индикаторная матрица (3.18) может быть получена в результате преобразования единичной матрицы второго порядка несимметричными составными кодами

$$\hat{G} = 2244 = 4422. \quad (3.24)$$

Легко убедиться в том, что $\hat{G}^2 = e$, то есть

$$\overline{2244} \cdot \overline{4422} \equiv e,$$

в силу того, что группа операторов Грея 4, объединенных нижней чертой, также как и группа операторов Грея 2, объединенных верхними черточками, в произведении порождают единичную матрицу e .

Следовательно, коды Грея 2244 и 4422 для модуля $m = 4$ и степени $n = 2$ являются не только сопряженными, но и взаимно обратными.

Интересно отметить, что несимметричный составной код $\hat{G} = 2244$ (или 4422) преобразует матрицы \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_3 ВКФ — Пэли $V_{4,2}$ в симметричные системы ВКФ, размещенные в узлах 31 и 32 рис. 3.12 соответственно.

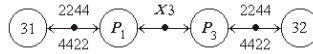


Рисунок 3.12. Расширение 3 систем $V_{4,2}$ (31–32)

На самом деле здесь нет ничего необычного, поскольку кодам (3.24) с параметрами $m=4$ и $n=2$ соответствует дважды симметрическая индикаторная матрица (3.20).

3.5. Системы ВКФ $V_{5,2}$

На интервале определения $N=25$, образованном второй степенью основания системы счисления $m=5$, всего существует 100 симметричных систем ВКФ 25 порядка $V_{5,2}$. Основу построения этих систем составляют четыре симметрические матрицы ДЭФ пятого порядка. Материнская система ДЭФ $E_5^{(1)}$ в пространстве изоморфного отображения имеет вид:

$$E_5^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (3.25)$$

Для того чтобы составить дочерние системы $E_5^{(k)}$, $k=\overline{2,4}$, достаточно заменить базисные функции, расположенные в первой строке матрицы (3.25), базисными функциями k -го порядка, $k=\overline{2,4}$.

Последующее размещение базисных функций в k -й дочерней системе ДЭФ $E_5^{(k)}$, $k=\overline{2,4}$, определяется элементами той функции, которая выбрана вместо примитивной базисной функции первого порядка материнской системы (3.25). Так, например, вслед за базисной функцией второго порядка в дочерней системе $E_5^{(2)}$ должны быть поставлены последовательно базисные функции четвертого, первого, а затем третьего порядков системы $E_5^{(1)}$, то есть

$$E_5^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Аналогичным образом составляются оставшиеся две дочерние системы ДЭФ:

$$E_5^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad E_5^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Вторые кронекеровские степени матриц (3.25)–(3.27) приводят к образованию четырех симметричных систем ВКФ — Адамара $H_{5,2}^{(i)}$ ($i = \overline{1,4}$) 25-го порядка. Инверсной перестановкой двухразрядных пятиричных номеров строк матриц $H_{5,2}^{(i)}$ формируются системы ВКФ — Пэли $P_{5,2}^{(i)}$, $i = \overline{1,4}$. В свою очередь каждая система ВКФ — Пэли является опорным узлом контуров, соответствующих элементарным кодам Грея $g = \overline{2,4}$. В пространстве параметров $m=5$ и $n=2$ период цикла кодов Грея $g = \overline{2,4}$ равен пяти. Следовательно, полное множество симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$ содержит четыре подмножества фундаментальных систем, в каждое из которых входят по десять симметрических матриц (рис. 3.13).

Период цикла симметричных составных кодов Грея третьего порядка для модуля $m=5$ с ядром $\omega=1$ равен 12. Контуры, соответствующие этим кодам, включают все четыре системы ВКФ — Пэли (рис. 3.14). Период цикла составного кода 242 равен трем. Контуры, формируемые этим кодом из каждой вершины P_i , $i = \overline{1,4}$, содержат по два узла и все они входят в контур 414. Аналогично, узлы контуров, образуемых составным кодом Грея 424, входят в контур 212. Следовательно, составные коды Грея 242 и 424 новых систем ВКФ $V_{5,2}$ (или иначе – новых индикаторных матриц систем ВКФ $V_{5,2}$) не образуют.

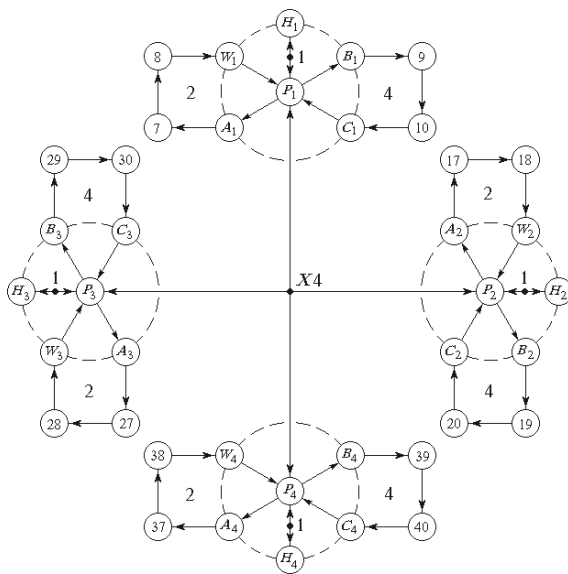


Рисунок 3.13. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{5,2}$ (1–40)

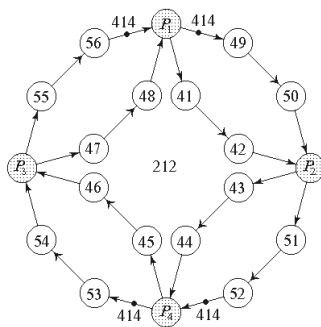


Рисунок 3.14. Расширение 1 систем ВКФ $V_{5,2}$ (41–56)

Оставшийся симметричный составной код Грея третьего порядка 252, период цикла которого равен четырем, формирует контуры с вершинами (узлами), являющимися системами ВКФ — Пэли (рис. 3.15).

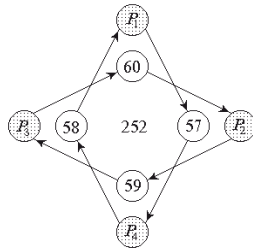


Рисунок 3.15. Расширение 2 систем ВКФ $V_{5,2}$ (57–60)

Сопряженный коду 252 составной код 434 является обратным первичному коду и поэтому дополнительных новых симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$ не образует.

Итак, с помощью элементарных и составных кодов Грея третьего порядка получено 60 из 100 симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$. Эмпирические попытки конструирования однородных составных кодов Грея, с помощью которых удалось бы осуществить “прорыв” в подмножество оставшихся 40 симметричных систем, к успеху не привели.

Оставив пока в стороне указанную проблему, к обсуждению которой мы вернемся несколько позже, обратимся к анализу взаимосвязи элементов подмножества, состоящего из узлов (индикаторных матриц симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$), входящих в контуры, представленные на рис. 3.13–3.15.

Назовем совокупность элементов ВКФ, содержащихся в графах на рис. 3.13-3.15, *Пэли* – *связанным* подмножеством систем ВКФ $V_{5,2}$. Обозначим его через P . Разобьем подмножество P на четыре равных по мощности (числу входящих в них элементов) P_i – подмножеств. В состав P_i – подмножества, $i = \overline{1, 4}$, кроме фундаментальных систем включим системы, находящиеся в ветвях контуров 212 и 414 (рис. 3.14) и контуров 252 (рис. 3.15), расположенных при обходе контуров по часовой стрелке между соседними ВКФ-Пэли системами. Например, P_1 – подмножество образуют фундаментальные ВКФ системы в окрестности узла P_1 на рис. 3.13, а также узлы 41, 42, 49, 50 из Расширения 1 (рис. 3.14) и узел 57 из Расширения 2 (рис. 3.15).

Ранее были введены операторы Xi , $i = 2, 3, 4$, посредством которых устанавливалась взаимосвязь между элементами, принадлежащими различным группам фундаментальных систем. Например, для того чтобы получить

матрицу ВКФ — Пэли P_2 достаточно умножить элементы матрицы P_1 на два по модулю $m = 5$, то есть воспользоваться оператором X_2 (рис. 3.16).

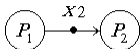


Рисунок 3.16. Граф взаимосвязи систем P_1 и P_2

Ниже будет показано, что операторы X_i связывают не только матрицы фундаментальных систем, но и все элементы P_i -подмножеств в соответствии с графом, представленным на рис. 3.17.

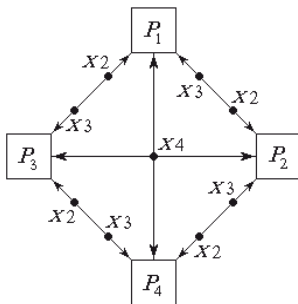


Рисунок 3.17. Граф взаимосвязи элементов P_i -подмножеств систем ВКФ $V_{5,2}$

Выразим операторы X_i через составные коды Грея. Как следует из рис. 3.14 оператор X_2 , посредством которого матрица P_1 преобразуется в матрицу P_2 , может быть представлен такими двумя группами составных кодов Грея:

$$X_2 = (212)^3;$$

$$X_2 = (414)^3.$$

Или

$$X_2 = 2441442; \tag{3.28}$$

$$X_2 = 4221224.$$

Система уравнений (3.28) непосредственным образом приводит к равенствам

$$2441442 = 4221224;$$

$$3551553 = 5331335.$$

Согласно рис. 3.17 оператор $X4 = (X2)^2$. Воспользовавшись представлениями $X2$ в соотношениях (3.28), получим

$$X4 = 244224422442;$$

$$X4 = 422442244224,$$

более компактная форма которых имеет вид

$$X4 = (2442)^3;$$

$$X4 = (4224)^3.$$

Еще одно выражение для оператора $X4$ можно получить из Расширения 2 систем ВКФ $V_{5,2}$ (рис. 3.15)

$$X4 = (252)^2, \quad (3.29)$$

которое является более простым по сравнению с двумя предыдущими.

И, наконец, в соответствии с рис. 3.16 легко приходим к выражению для оператора $X3$, являющегося обратным по отношению к оператору $X2$,

$$X3 = 3551553; \quad (3.30)$$

$$X3 = 5331335.$$

Воспользовавшись первой фундаментальной леммой Грея в формах $3 = 151$ и $5 = 131$, находим

$$X3 = (313)^3 = (515)^3.$$

Таким образом, в пространстве параметров $m = 5$ и $n = 2$ операторы $X2$ и $X3$ согласно соотношениям (3.28) и (3.30) задаются симметричными составными кодами Грея седьмого порядка, а оператор $X4$ в соответствии с (3.29) – составным кодом шестого порядка.

Сведем индикаторные матрицы систем ВКФ $V_{5,2}$ и соответствующие им номера (или буквенные обозначения) узлов в табл. 3.5, разбив ее на четыре группы, соответствующие P_i – подмножествам. Таблица 3.5 достаточно наглядно иллюстрирует закон взаимосвязи элементов P_i – подмножеств симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$, графически отображенный на рис. 3.15.

Таблица 3.5. Индикаторные матрицы фундаментальных систем $V_{5,2}$

P_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	H_1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	A_1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	W_1	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	B_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	C_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	41	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	42	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
49	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	50	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	57	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$						
P_2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	H_2	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	A_2	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	W_2	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	B_2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	C_2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	43	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	44	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
51	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	52	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	59	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$						
P_3	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	H_3	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	A_3	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	W_3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	B_3	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	C_3	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
27	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	29	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	30	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	47	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	48	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
55	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	56	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	60	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$						
P_4	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	H_4	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	A_4	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	W_4	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	B_4	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	C_4	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
37	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	38	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	39	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	40	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	45	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	46	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
53	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	54	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	58	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$						

Перейдем к вопросу об установлении характера взаимосвязи элементов, не вошедших в Пэли-связанное подмножество симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$. Как уже было отмечено ранее, попытка подбора составного кода Грея, посредством которого можно было бы разорвать оболочку P – подмножества и тем самым выйти в P – дополнение, не увенчалась успехом. Это обстоятельство подталкивает нас к необходимости поиска новых нетрадиционных подходов к решению задачи синтеза матрицеобразующих кодов, которые состоят в переходе к обобщенным кодам Грея.

Максимальный порядок контуров доставляют обобщенные коды Грея, структурные схемы которых для прямого G_1 и сопряженного G_1^* преобразований показаны на рис. 3.18, *a*) и *b*) соответственно

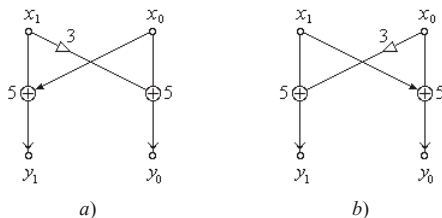


Рисунок 3.18. Структурные схемы алгоритмов формирования обобщенных кодов Грея:

a) – прямого; *b*) – сопряженного

Система линейных модульных уравнений, отвечающих оператору G_1 , имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \oplus^5 x_0; \\ y_0 &= 3x_1 \oplus^5 x_0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Соотношения (3.31) по правилу «строку в столбец» дают возможность записать выражение для индикаторной матрицы, соответствующей оператору

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Аналогичным образом получим

$$G_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Контурь, формируемые индикаторными матрицами (3.32) и (3.33), представлены на рис. 3.19, причем внутренний контур отвечает оператору G_1 , а внешний – оператору G_1^* .

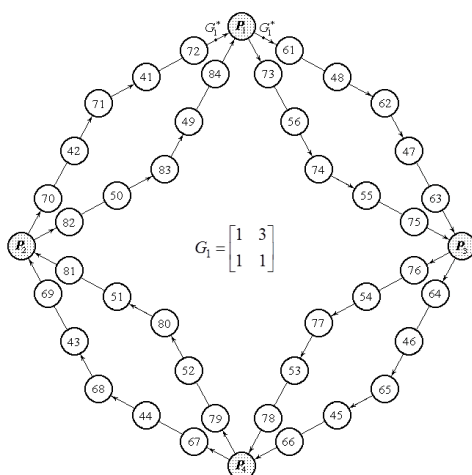


Рисунок 3.19. Расширение A систем ВКФ $V_{5,2}$ (41–84)

Отметим такие особенности расширения A . Во-первых, оно полностью покрывает узлы 41–56 Расширения 1, которое становится излишним. Вместе с этим отпадает необходимость в применении симметричных составных кодов 212 и 414. Во-вторых, несмотря на то, что Расширение A фактически включает 40 новых узлов, размер Расширения A указан равным 44. Здесь принято во внимание то, что узлы 57–60, вошедшие в Расширение 2 (рис. 3.15), учтены в нумерации узлов на рис. 3.19.

Индикаторные матрицы систем ВКФ $V_{5,2}$, порождаемые обобщенным составным кодом G_1 , сведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6. Индикаторные матрицы систем $V_{5,2}$, порождаемые обобщенным СКГ

P_1 :	61	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	62	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	63	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	73	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	74	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	75	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$
P_3 :	64	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	65	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	66	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	76	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	77	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	78	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
P_4 :	67	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	68	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	69	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	79	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	80	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	81	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
P_2 :	70	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	71	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	72	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	82	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	83	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	84	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Для удобства восприятия подмножество матриц разбито на кластеры, каждая из которых помечена опорной индикаторной матрицей P_i , $i = \overline{1, 4}$. К P_i кластеру будем относить матрицы, располагающиеся на дугах по направлению вращения часовой стрелки относительно матрицы P_i .

Следующую группу контуров образует обобщенный код Грея

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

формируемой схемой, которая показана на рис. 3.20.

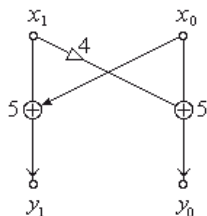


Рисунок 3.20. Структурная схема алгоритма формирования обобщенного кода Грея G_2

Контурь, отвечающие составному коду (3.34), представлены на рис. 3.21.

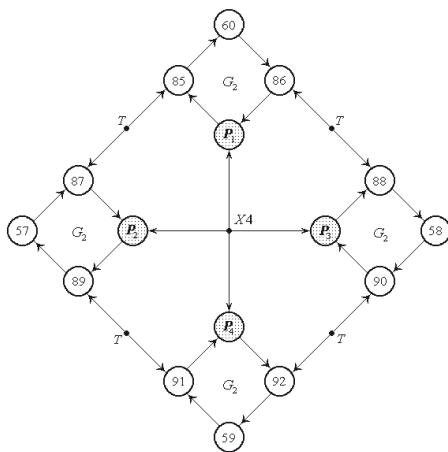


Рисунок 3.21. Расширение B систем ВКФ $V_{5,2}$ (85–92)

Обратим внимание на то, что граф контуров на рис. 3.21 включает, в том числе, взаимно сопряженные узлы. Таковыми являются полярные узлы (как по вертикали, так и горизонтали графа), а также узлы, соединенные оператором транспонирования t . Следовательно, отпадает необходимость в составлении контуров, отвечающих оператору, сопряженному оператору G_2 .

Неповторяющиеся в предыдущих графах индикаторные матрицы Расширения B приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7. Индикаторные матрицы расширения B

85	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	86	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	87	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	88	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
89	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	90	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	91	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	92	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

И, наконец, оставшиеся восемь индикаторных матриц систем ВКФ $V_{5,2}$ могут быть сформированы дважды симметричным обобщенным составным кодом Грея

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

которому отвечает структурная схема, показанная на рис. 3.22.

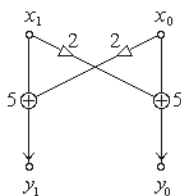


Рисунок 3.22. Структурная схема алгоритма формирования обобщенного кода Грея G_3

Контурные узлы (индикаторных матриц), образуемые в окрестностях систем ВКФ — Пэли оператором G_3 , показаны на рис. 3.23.

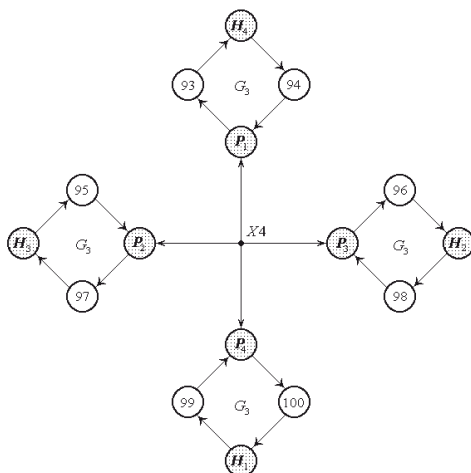


Рисунок 3.23. Расширение C систем ВКФ $V_{5,2}$ (93–100)

Новые индикаторные матрицы систем ВКФ $V_{5,2}$ из Расширения C на рис. 3.72, порождаемые кодом Грея (3.35), приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8. Индикаторные матрицы расширения C

93	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	94	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	95	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	96	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
97	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	98	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	99	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	100	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Таким образом, граф фундаментальных систем (рис. 3.13) совместно с Расширениями 2 , A , B и C содержат все 100 индикаторных матриц второго порядка симметричных систем ВКФ $V_{5,2}$, с помощью которых из единственной системы ВКФ-Пэли P_1 может быть получено полное множество систем $V_{5,2}$, индикаторные матрицы которых приведены в Приложении 5.

3.6. Системы ВКФ $V_{6,2}$

Основанию системы счисления $m=6$ отвечают две симметричные системы ДЭФ. В пространстве изоморфного отображения матрица

$$E_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

является материнской системой, а матрица

$$E_6^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

есть дочерняя система ДЭФ шестого порядка.

На интервале $N = 6^2$ всего существует 72 симметричные системы ВКФ $V_{6,2}$. Таблица ИМ систем ВКФ $V_{6,2}$ приведена в Приложении 6. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{6,2}$ представлен на рис. 3.24.

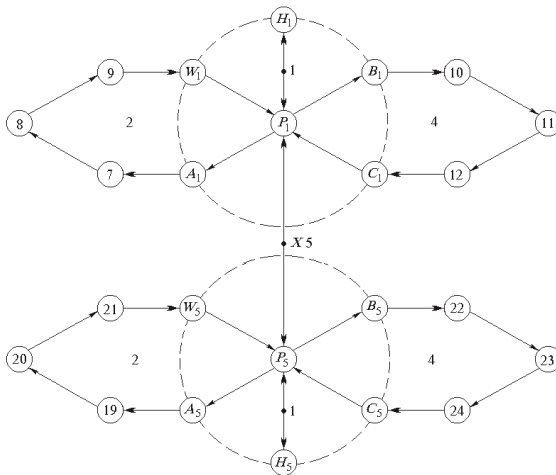


Рисунок 3.24. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{6,2}$ (1–24)

Следующую группу Пэли-связанных индикаторных матриц систем ВКФ $V_{6,2}$ образуют узлы контуров, формируемых симметричными составными кодами Грея третьего порядка (рис. 3.25).

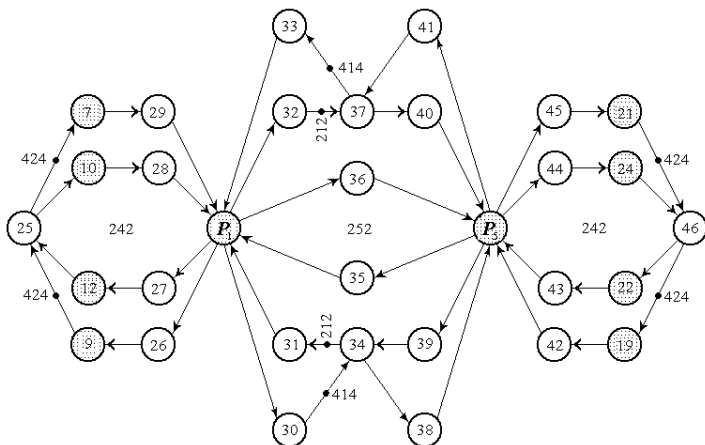


Рисунок 3.25. Расширение 1 систем ВКФ $V_{6,2}$ (25–46)

Из анализа графа, представленного на рис. 3.25, можно установить такие свойства составных кодов Грея с параметрами $m=6$ и $n=2$. Во-первых, поскольку контур, соответствующий составному коду $G=252$, содержит взаимно сопряженные индикаторные матрицы, то это означает, что коды 252 и 434 формируют одинаковые наборы узлов. И, во-вторых,

$$(212)^2 \equiv (414)^2,$$

то есть

$$2442 = 4224.$$

Симметричные составные коды Грея пятого порядка (рис. 3.26) образуют группу узлов, состоящую из 20 новых индикаторных матриц систем ВКФ $V_{5,2}$.

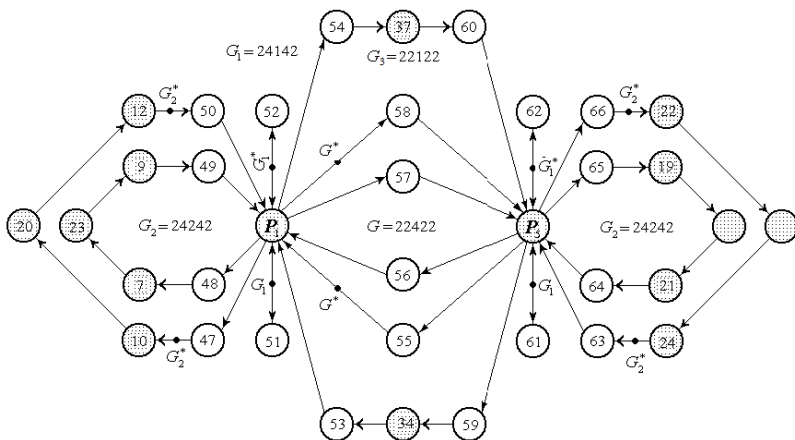


Рисунок 3.26. Расширение 2 систем ВКФ $V_{6,2}$ (47–66)

Графы контуров, представленные на рис. 3.24–3.26, отображающие связи индикаторных матриц систем ВКФ $V_{6,2}$, содержат 66 оригинальных (т. е. неповторяющихся) узлов. Шесть матриц, не вошедших в обозначенные графы, сведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9. Остаточные индикаторные матрицы систем $V_{6,2}$

67	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	68	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	69	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	70	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	71	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	72	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

Легко убедиться в том, что выбрав в качестве стартовой одну из индикаторных матриц, соответствующих номерам 67–70 в табл. 3.9, все остальные матрицы из этой подгруппы оказываются Пэли-связанными. Так, например, если таковой является матрица

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

то приходим к графу, показанному на рис. 3.27.

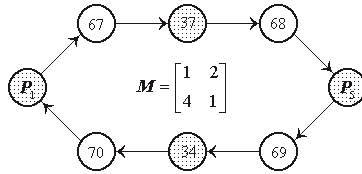


Рисунок 3.27. Расширение 3 систем ВКФ $V_{6,2}$ (67–70)

Индикаторная матрица (3.36) образуется обобщенным кодом Грея, структурная схема которого представлена на рис. 3.28.

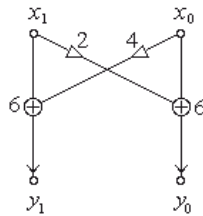


Рисунок 3.28. Структурная схема алгоритма формирования обобщенного кода Грея M

Для оставшихся двух индикаторных матриц под номерами 71 и 72 (табл. 3.9) возможны два варианта (рис. 3.29, а и 3.29, б) их формирования

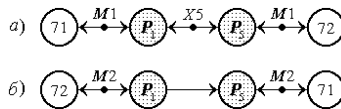


Рисунок 3.29. Расширение 4 систем ВКФ $V_{6,2}$ (71, 72)

Обобщенными кодами

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

завершается процедура формирования полного множества индикаторных матриц систем ВКФ $V_{6,2}$, содержащего 72 элемента.

3.7. Системы ВКФ $V_{7,2}$

В основе построения симметричных систем ВКФ $V_{7,2}$ находятся матрицы ДЭФ седьмого порядка. В пространстве изоморфного отображения материнская система ДЭФ имеет вид:

$$E_7^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Оставшиеся пять дочерних систем ДЭФ $E_7^{(k)}$, $k = \overline{2,6}$, могут быть получены из матрицы (3.37) в результате замены базисной функции $e(1,n)$ системы $E_7^{(1)}$ на функции $e(k,n)$, $k = \overline{2,6}$. Порядок следования элементов функции $e(k,n)$ определяет порядок расположения базисных функций системы $E_7^{(1)}$ в системах $E_7^{(k)}$. Например, если $k = 4$, то

$$E_7^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом составляются все остальные дочерние системы ДЭФ $E_7^{(i)}$. Каждой симметричной системе ДЭФ соответствует своя группа фундаментальных систем ВКФ $V_{7,2}$ (рис. 3.30).

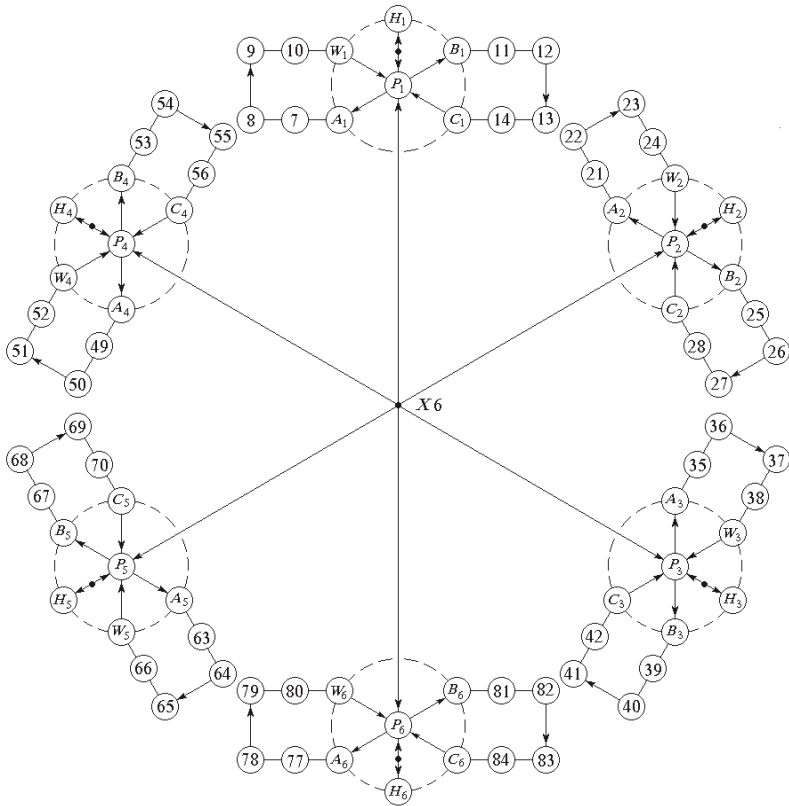


Рисунок 3.30. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{7,2}$ (1–84)

Симметричные составные коды Грея третьего порядка $G_1 = 212$, $G_2 = 242$ и $G_3 = 252$ и соответствующие им сопряженные коды (кроме кода $G_3 = 252$, контур которого уже содержит пару сопряженных индикаторных матриц) совместно формируют 102 оригинальные (неповторяющиеся) индикаторные матрицы систем ВКФ $V_{7,2}$ (рис. 3.31).

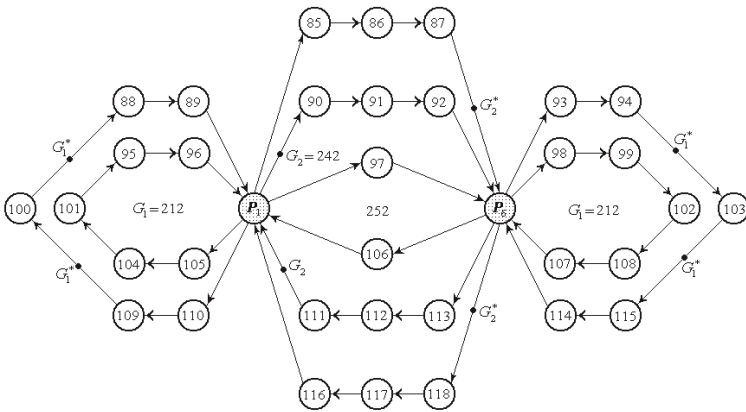


Рисунок 3.31. Расширение 1 систем ВКФ $V_{7,2}$ (85–186)

Как показали результаты машинного моделирования, составному коду $G_1 = 22122$ отвечает контур 16-го порядка, причем оригинальными являются все нечетные узлы. Граф контуров для кода $G_1 = 22122$, в которых с целью упрощения выброшены повторяющиеся индикаторные матрицы (за исключением опорных систем P_i , $i = \overline{1, 6}$), а также дважды симметричные узлы контуров $G_2 = 22422$, отображены на рис. 3.32.

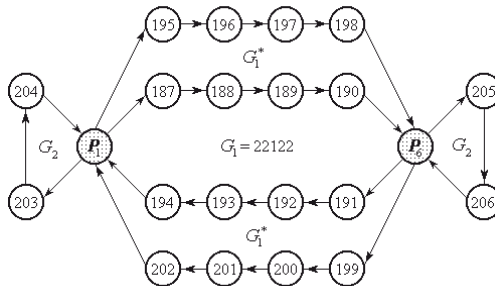


Рисунок 3.32. Расширение 2 систем ВКФ $V_{7,2}$ (187–246)

Из 294 индикаторных матриц систем ВКФ $V_{7,2}$ оказались не связанными составными кодами Грея дважды симметрические индикаторные матрицы, сведенные в табл. 3.10.

Таблица 3.10. Совокупность дважды симметрических ИМ систем ВКФ $V_{7,2}$

283	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	284	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	285	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	286	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	287	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	288	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
289	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	290	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	291	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$	292	$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$	293	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	294	$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Поскольку возможности симметричных кодов, составленных из простых кодов Грея, оказались исчерпанными, то есть ни один из них не образует контуры, содержащие узлы из табл. 3.10, воспользуемся обобщенными кодами Грея. Легко убедиться в том, что в качестве такого кода можно принять любой из кодов G , матрицы преобразований которых приведены в табл. 3.10.

Таким образом, совокупностью симметричных составных кодов Грея нечетного порядка могут быть получены все 294 индикаторных матрицы систем ВКФ $V_{7,2}$, сведенные в Приложении 7.

3.8. Системы ВКФ $V_{8,2}$

На интервале $N=8^2$ существует 256 симметричных систем ВКФ $V_{8,2}$ 64-го порядка. В основе построения систем $V_{8,2}$ находятся четыре симметричные системы ДЭФ. Материнская система ДЭФ восьмого порядка $E_8^{(1)}$ в пространстве изоморфного отображения имеет вид

$$E_8^{(1)} = \begin{matrix} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & n \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} & . \end{matrix} \quad (3.38)$$

Система (3.38) и дочерние системы ДЭФ $E_8^{(i)}$, $i=3, 5, 7$, связаны графом, отображенным на рис. 3.33.

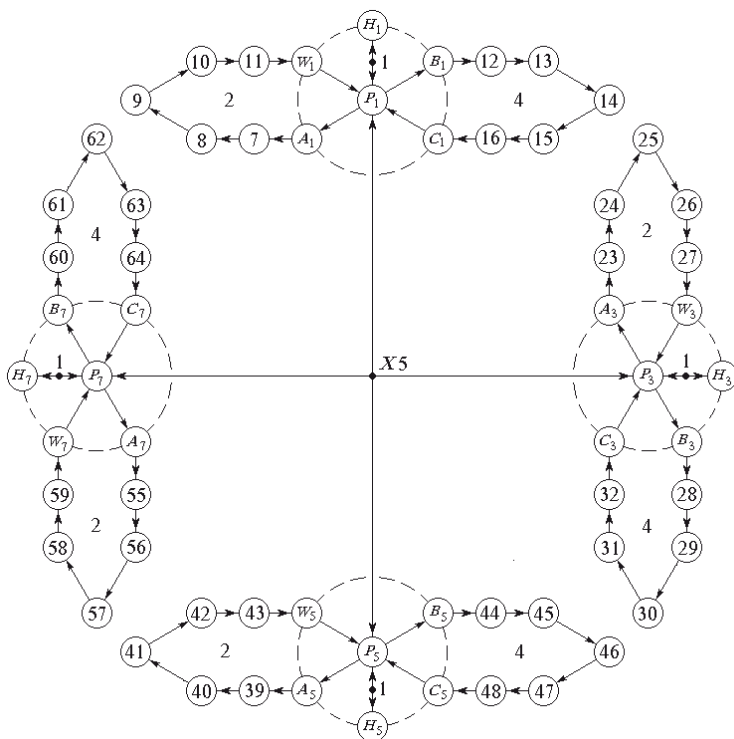


Рисунок 3.33. Граф фундаментальных систем ВКФ $V_{8,2}$

Правила установления взаимосвязи всех 256 ИМ систем ВКФ $V_{8,2}$ решается теми же самыми приемами, которые были использованы в предыдущих параграфах раздела. Полные совокупности индикаторных матриц ВКФ $V_{8,2}$, и вместе с ними индикаторные матрицы ВКФ $V_{9,2}$ и $V_{10,2}$ приведены в Приложениях 8-10 соответственно.

3.9. Структурно-логические алгоритмы БПФ в базисах ВКФ

Ниже рассматриваются варианты построения структурно-логических схем алгоритмов быстрого преобразования Фурье в базисах ВКФ для различных оснований систем счисления [48-51].

3.9.1. Преобразования по модулю степени 2

В данном классе быстрых ВКФ — преобразований основание системы счисления m задается соотношением

$$m = 2^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которому соответствует интервал определения ВКФ

$$N = m^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где n — разрядность преобразуемых двоичных чисел.

Для степени $k=1$ модуль $m=2$ и системы ВКФ переходят в системы функций Уолша, подробно рассмотренные в разделе 1. Если $k=2$, то модуль $m=4$. Данному значению модуля m отвечают две системы ДЭФ, в числе которых изоморфные материнская система

$$\mathbf{E}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.39)$$

и дочерняя система

$$\mathbf{E}_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Отображение (3.39) обеспечивается стандартным алгоритмом четырехточечного БПФ в базисе ДЭФ (рис. 3.34) с двоично-инверсной перестановкой номеров отсчетов входного сигнала \mathbf{x} .

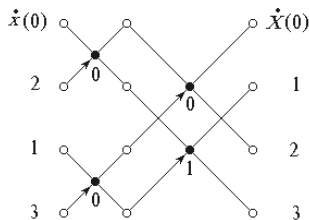


Рисунок 3.34. Дерево четырехточечного БПФ в базисе материнской системы ДЭФ

Переход к дочерней системе ДЭФ (3.40) осуществляется за счет умножения всех элементов матрицы (3.39) на 3 и приведением результатов произведения к остатку по mod 4. Такие же операции выполняются над показателями степени весовых (фазовых) множителей в дереве БПФ (рис. 3.35).

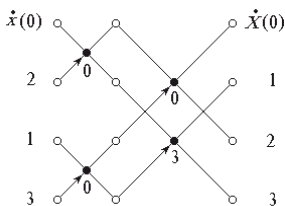


Рисунок 3.35. Дерево четырехточечного БПФ в базисе дочерней системы ДЭФ

Деревья четырехточечных БПФ (рис. 3.34 и 3.35) составляют основу построения деревьев БПФ в базисах материнской $H_{16}^{(1)}$ (рис. 3.36) и дочерней $H_{16}^{(2)}$ (дерево БПФ не показано) систем ВКФ-Адамара соответственно, причем $H_{16}^{(i)} = (E_4^{(i)})^{[2]}$, $i = 1, 2$.

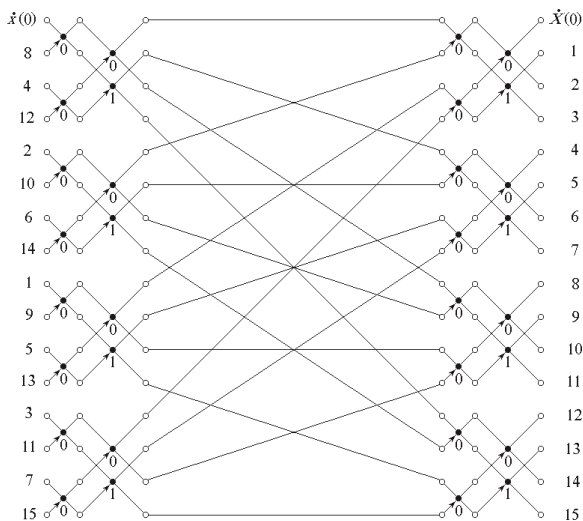


Рисунок 3.36. Дерево 16-точечного БПФ в базисе материнской системы ВКФ-Адамара $V_{4,2}$

Алгоритм 16-точечного БПФ в базисах ВКФ — Адамара представляет собой двухэтапную процедуру преобразования, причем каждый этап содержит по четыре (для $m=4$) блока, осуществляющих четырехточечное БПФ в базисах $E_4^{(1)}$ или $E_4^{(2)}$ для вычисления $H_{16}^{(1)}$ или $H_{16}^{(2)}$ соответственно.

На основании дерева БПФ, изображенного на рис. 3.36, легко составить матрицу преобразования, отвечающую материнской системе ВКФ — Адамара $V_{4,2}$.

Если в дереве преобразования произвести замену показателя степени 1 фазового множителя $\Psi = \exp\{-\pi/2\}$ на 3, то тем самым приходим к структурной схеме алгоритма БПФ в базисе дочерней системы ВКФ — Адамара $H_{16}^{(2)}$ для модуля $m=4$.

Обратим внимание на межэтапные соединения дерева на рис. 3.36. Нулевые отклики всех четырех процессоров БПФ, образующих первый этап преобразования, подводятся к входам нулевого (верхнего) процессора второго этапа преобразования. Отклики первых частотных каналов процессоров первого этапа преобразования подаются на соответствующие входы первого процессора второго этапа преобразования и т.д. Введем условные обозначения для процессоров БПФ.

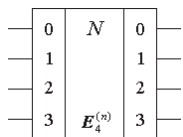


Рисунок 3.37. Четырехточечный процессор БПФ в базисе ДЭФ

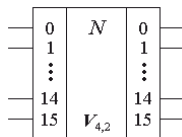


Рисунок 3.38. 16-точечный процессор БПФ в базисе ВКФ—Адамара $V_{4,2}$

Воспользовавшись обозначениями процессоров, представленных на рис. 3.37 и 3.38, и опираясь на приведенное выше пояснение к межэтапным соединениям, составим структурную схему процессора БПФ в базисе ВКФ — Адамара $V_{4,3}$ (рис. 3.39).

Рассмотренные варианты построения структурных схем алгоритмов БПФ в базисах ВКФ — Адамара $V_{4,2}$ (рис. 3.36) и $V_{4,3}$ (рис. 3.39) легко обобщаются на схемы алгоритмов БПФ в базисах систем $V_{4,n}$, $n > 3$.

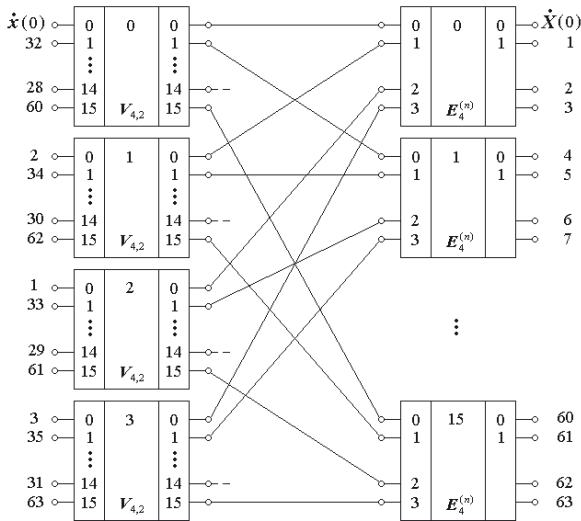


Рисунок 3.39. Структурная схема процессора БПФ в базисе ВКФ-Адамара $V_{4,3}$

Перейдем к краткой характеристике методов реализации алгоритмов БПФ в базисах ВКФ — Адамара систем $V_{8,n}$. Основу таких алгоритмов составляют восьмиточечный ДЭФ-процессор БПФ, структурная схема которого показана на рис. 3.40.

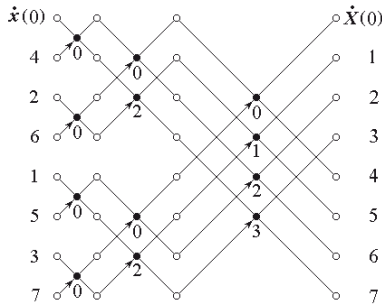


Рисунок 3.40. Структурная схема восьмиточечного БПФ в базисе ДЭФ

Воспользовавшись условным обозначением восьмиточечного БПФ в базисе ДЭФ (рис. 3.41),

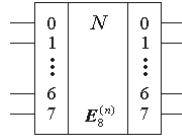


Рисунок 3.41. Восьмиточечный процессор БПФ в базисе ДЭФ

составим структурную схему процессора 64-точечного БПФ в базисе ВКФ — Адамара системы $V_{8,2}$ (рис. 3.42).

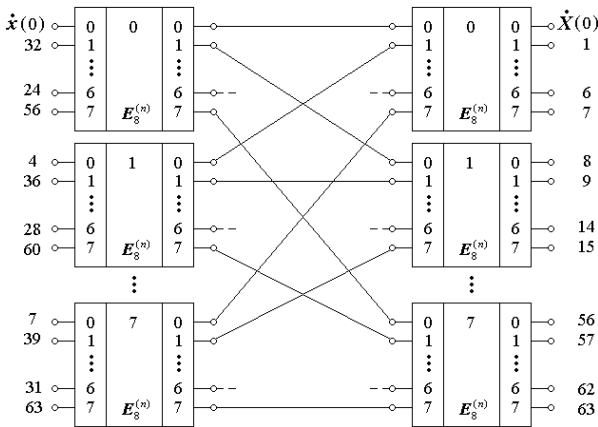


Рисунок 3.42. Структурная схема процессора БПФ в базисе ВКФ-Адамара $V_{8,2}$

Расстановка показателей степени фазовых множителей, приведенная на рис. 3.40, отвечает материнскому базису ДЭФ $E_8^{(1)}$. Показатели степени поворачивающих множителей Ψ для дочерних базисов ДЭФ восьмого порядка приведены в табл. 3.11.

Таблица 3.11. Распределение степеней поворачивающих множителей

Степень преобразования	Дочерние системы ДЭФ		
	2	3	4
Третья	0 3 6 1	0 5 2 7	0 7 6 5
Вторая	0 6	0 2	0 6
Первая	0	0	0

На основании изложенной выше методики, легко составить структурные схемы алгоритмов БПФ в базисах ВКФ — Адамара для произвольного значения модуля $m = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$, и заданной разрядности $n = 1, 2, \dots$ m -ичных чисел.

3.9.2. Преобразования по модулю степени простых чисел

В разделе 3.9.1 рассмотрены вопросы структурирования алгоритмов БПФ в базисах систем ВКФ по модулю m , являющегося степенью двойки. Отличительная особенность алгоритмов БПФ в таких базисах систем ВКФ состоит в том, что в основе их реализации находятся операторы типа «бабочка», допускающие возможность существенного сокращения как объема оборудования, необходимого для аппаратной реализации, так и времени, затрачиваемого на машинную реализацию процессоров. Процессоры ДПФ с основанием системы счисления m , являющимся степенью простого числа p , когда $m = p^n$, $n = 1, 2, \dots$, указанными выше свойствами не обладают. Это означает, что фактически машинное время, затрачиваемое на реализацию p -точечного ДПФ и БПФ, совпадают.

Далее в качестве примера рассмотрим алгоритмы построения n -ступенчатых, $n = 2, 3, \dots$, процессоров БПФ в базисах систем ВКФ с основанием $p = 3$. Введем условное обозначение (рис. 3.43) трехточечного ДПФ в базисе ДЭФ. Преобразование данных, осуществляемое трехточечным процессором, отобразим в виде графа, показанного на рис. 3.44.

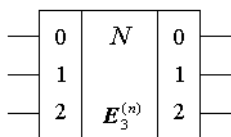


Рисунок 3.43. Трехточечный процессор БПФ в базисе ДЭФ

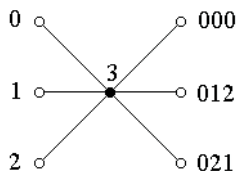


Рисунок 3.44. Оператор трехточечного преобразования

Одноразрядные десятичные числа, стоящие с левой стороны графа на рис. 3.44, соответствуют номеру входов оператора, а троичные числа на выходе графа отвечают показателям степени фазовых множителей Ψ в откликах y_i , $i = 0, 1, 2$, оператора преобразования. При этом старший (левый) разряд числа

соответствует показателю степени множителя Ψ для операнда x , поступающего на первый (верхний) вход оператора, средний – на второй и, наконец, младший разряд отвечает показателю степени множителя Ψ для операнда x , поступающего на третий (нижний) вход оператора преобразования. Таким образом, оператор, представленный на рис. 3.44, реализует классическое трехточечное ДПФ

$$y_0 = x_0\Psi^0 + x_1\Psi^0 + x_2\Psi^0;$$

$$y_1 = x_0\Psi^0 + x_1\Psi^1 + x_2\Psi^2;$$

$$y_2 = x_0\Psi^0 + x_1\Psi^2 + x_2\Psi^1.$$

Граф преобразования, отображенный на рис. 3.44, отвечает материнской системе ДЭФ, $m=3$. В дочерней системе числа 012 и 021 оператора преобразования (рис. 3.44) следует поменять местами.

Структурная схема алгоритма БПФ в базисе ВКФ $V_{3,2}$ (безотносительно к тому, материнской или дочерней являются система трехточечных ДЭФ) показана на рис. 3.45.

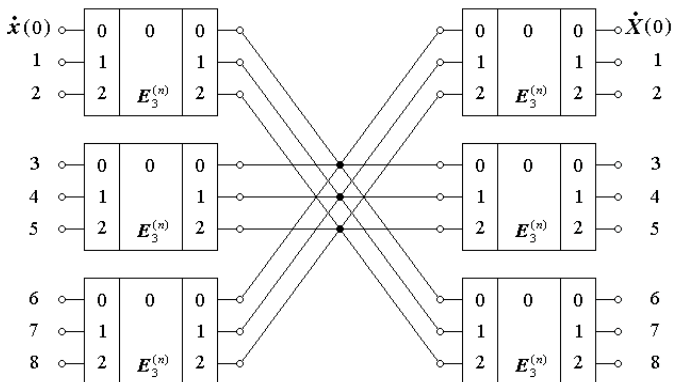


Рисунок 3.45. Структурная схема процессора БПФ в базисе ВКФ $V_{3,2}$

Естественная последовательность отсчетов входного сигнала $x(t)$ образует на выходе процессора гармоники $\dot{X}(k)$, $k=\overline{0,8}$. Матрица преобразования, отвечающая естественной последовательности входных сигналов и весам операндов, указанных на рис. 3.45, соответствует матрице ВКФ-Адамара $H_{3,2}^{(1)}$. Если номера отсчетов входных сигналов, представленных двухразрядными троичными числами, подвергнуть инверсной перестановке, то

3.9.3. Преобразования по модулю составных чисел

Методику синтеза структурных схем процессоров БПФ в базисах ВКФ $V_{m,n}$ по составному модулю проиллюстрируем на примере $m = 6$. В качестве базовой схемы выберем структурную схему алгоритма шеститочечного БПФ в базисе ДЭФ (рис. 1.20), показанную на рис. 3.47.

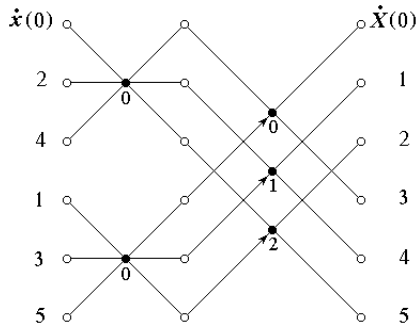


Рисунок 3.47. Базовый граф шеститочечного БПФ

Первая ступень дерева БПФ в базисе ДЭФ включает два оператора трехточечного ДПФ, матрицы преобразования которых M определяются соотношением

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Во второй степени дерева БПФ включены три базовых двухточечных оператора ДПФ с коэффициентами (весами ребер, отмеченных стрелками) $l = 0, 1$ и 2 . Эти коэффициенты суммируются по модулю 6 с соответствующими коэффициентами компонентов входного сигнала, которые подводятся на нижние входы двухточечного ДПФ.

Оператор БПФ на рис. 3.47 отвечает материнской шеститочечной системе ДЭФ. Для того чтобы построить оператор, осуществляющий преобразование Фурье в дочерней системе ДЭФ, достаточно произвести инверсию откликов с первого по шестой в упомянутом операторе. Введем условное обозначение (рис. 3.48) процессора шеститочечного БПФ в базисе ДЭФ безотносительно к тому, какое преобразование (материнское или дочернее) им реализуется.

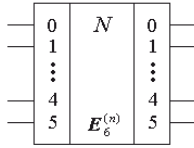


Рисунок 3.48. Условное обозначение процессора шеститочечного БПФ в базисе ДЭФ

Используя элементы, введенные рисунком 3.48, составим структурную схему (рис. 3.49) процессора БПФ в базисе ВКФ $V_{6,2}$.

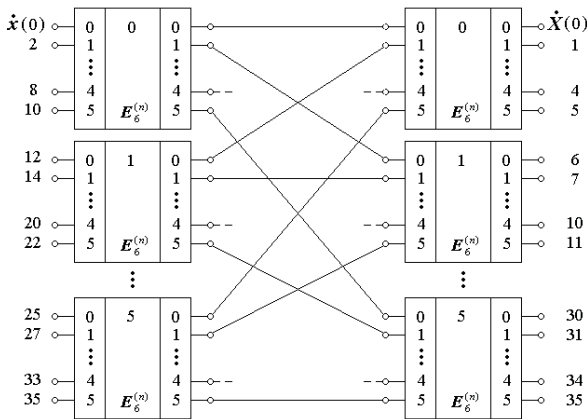


Рисунок 3.49. Структурная схема процессора БПФ в базисе ВКФ $V_{6,2}$

Матрицу преобразования, отвечающую той или иной системе $V_{6,2}$, можно получить соответствующими перестановками отсчетов сигнала, подаваемых на вход процессора. Не составляет труда также составить структурную схему процессора в базисе ВКФ системы $V_{6,n}$ для произвольного $n \geq 3$ (как и для других значений m смешанного модуля преобразования).

Когда наука достигает какой-либо вершины, с нее открывается обширная перспектива дальнейшего пути к новым вершинам, открываются новые дороги, по которым наука пойдет дальше

С.И. Вавилов

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Рассматривавшиеся в монографии базисные системы ДЭФ, функций Уолша и ВКФ имеют продолжительную историю своего становления и развития и к настоящему времени достаточно полно раскрыты в многочисленных литературных источниках. В связи с этим естественно возникает необходимость в пояснении, а что же нового читатель может почерпнуть в материалах данной книги? Ниже в сжатой форме будут отмечены основные результаты работы, которые, по мнению автора, содержат в себе признаки новизны.

Укажем, прежде всего, на то, что основу синтеза и анализа трех перечисленных выше базисных ортогональных систем составляет аппарат так называемой *модулярной алгебры*. Применительно к указанным системам суть математического аппарата состоит в следующем.

Во-первых, в классической алгебре элементами матриц преобразования систем ДЭФ являются степени $k \in [0, m-1]$, где m – модуль, или основание счисления, комплексно-значной величины $\psi = \exp(-j2\pi / m)$, являющейся фазовым (поворачивающим) множителем. Переход от комплексно-значных элементов матриц систем ДЭФ ψ^k к целочисленным значениям осуществляется биективным (изоморфным) отображением $\psi^k \leftrightarrow k$. В результате такой замены:

- операция перемножения комплексных элементов ψ^k и ψ^l матриц ДЭФ в пространстве оригиналов переходит в пространстве отображений в операцию сложения целых переменных k и l по модулю m ;

- значимо упрощается процедура факторизации матриц преобразования материнских и дочерних систем ДЭФ.

Во-вторых, что особенно важно, процедура факторизации базисных систем ВКФ вообще может быть исключена. Дело в том, что в алгоритмах БПФ при смене базиса ВКФ и фиксированных значениях параметров m и n структура дерева преобразования сохраняется неизменной и повторяет известную схему Кули-Тьюки, а смена базиса достигается элементарными перестановками номеров отсчета сигнала на входе процессора БПФ, причем правила перестановки устанавливаются индикаторными матрицами систем ВКФ.

И в заключение монографии отметим следующее. Совсем не обязательно индикаторные матрицы систем ВКФ должны быть исключительно правосторонними симметрическими матрицами. В качестве ИМ могут быть приняты и классические левосторонние симметрические матрицы. Удобство использования правосторонне симметрических матриц для индикаторных матриц состоит в том, что к правосторонней симметрии мы приходим естественным образом, подвергая единичную матрицу элементарным преобразованиям Грея.

Более подробные сведения относительно правосторонних и левосторонних симметрических индикаторных матриц можно почерпнуть из монографии [5].

СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

АФХ – амплитудно-фазовые характеристики.
 БПФ – быстрое преобразование Фурье.
 ВКФ – Виленкина-Крестенсона функции.
 ДИП – двоично-инверсная перестановка.
 ДПФ – дискретное преобразование Фурье.
 ДЭФ – дискретные экспоненциальные функции.
 ИМ – индикаторная матрица системы ВКФ.
 ОСС – основание системы счисления.
 ФМ – фазовый множитель.

m – основание системы счисления.
 n – разрядность кодовых комбинаций (порядок матрицы, кронекеровская степень).
 t – нормированное дискретное время.
 γ – нормированная частота входного сигнала.

$L_{m,n}$ – число симметричных систем ВКФ.

$M^{[n]}$ – кронекеровская степень n матрицы M .

E_m – система ДЭФ m -го порядка.

$N = m^n$ – порядок системы ВКФ.

F – факторизованная матрица.

$V_{m,n}$ – система ВКФ по ОСС m .

$H_{m,n}$ – система ВКФ-Адамара.

$P_{m,n}$ – система ВКФ-Пэли.

$W_{m,n}$ – система ВКФ-Уолша.

$C_{m,n}$ – система ВКФ-Кули.

J_n – индикаторная матрица системы ВКФ.

\times – символ кронекеровского произведения.

$\overset{\circ}{\rightarrow}$
 КГ – прямой левосторонний код Грея.

$\overset{\circ}{\leftarrow}$
 КГ – прямой правосторонний код Грея.

$\overset{\circ}{\rightarrow}$
 ОКГ – обратный левосторонний код Грея.

$\overset{\circ}{\leftarrow}$
 ОКГ – обратный правосторонний код Грея.

X_k – оператор умножения на k по модулю m .

$\overset{m}{\oplus}$ – оператор поразрядного сложения по модулю m .

$\dot{X}(\omega)$ – комплексный спектр сигнала.

$\dot{X}(k)$ – коэффициент (k -я гармоника) ДПФ.

$(a)_m$ – вычет числа a по модулю m .

p – простое число.

$\varphi(k, t) = \varphi_k(t)$ – базисная ВКФ k -го порядка дискретного аргумента t .

$\varphi(m)$ – функция Эйлера.

Ψ – фазовый (поворачивающий) множитель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артемьев М. Ю., Гаев Г. П., Кренкель Т. Э., Скотников А. П. Алгоритм формирования симметричных систем функций Уолша. // Радиотехника и электроника, № 3, 1978. – С. 1432-1440.
2. Аршинов М. Н., Садовский Л. Е. Коды и математика. — М.: Наука, 1983. – 144 с.
3. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. — М.: Связь, 1980. – 248 с.
4. Бабак В. П., Белецкий А. Я., Гуржий А. Н. Сигналы и спектры. Учебное пособие: — К.: Кн. изд-во НАУ, 2005. – 520 с.
5. Белецкий А.Я. Обобщенные коды Грея. — Научная монография. — Palmarium Academic Publishing, Germany, 2014. – 208 с. ISBN 978-3-639-68389-9.
6. Белецкий А. Я., Преобразования Грея. — Монография в двух томах. Т. 1. Основы теории. — К.: Кн. изд-во НАУ, 2007. – 412 с.
7. Белецкий А. Я. Преобразования Грея.— Монография в двух томах. Т.2. Прикладные аспекты. — К.: Кн. изд-во НАУ, 2007. – 644 с.
8. Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. Научное издание. — К.: Изд. Компания «КВИЦ», 2003. – 506 с.
9. Белецкий А.Я. Коды Грея. Научное издание. — К.: Изд. Компания «КИТ», 2002. – 150 с.
10. Белецкий А. Я., Бабак В. П. Детерминированные сигналы и спектры: Учебное пособие. — К.: Изд. Компания «КИТ», 2002. – 502 с.
11. Белецкий А. Я. Базисные системы дискретных экспоненциальных функций. // Киберн. и вычисл. техника, 2003, Вып.142. – С. 45-62.
12. Белецкий А. Я. Индикаторные матрицы систем функций Уолша. // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки, № 4, 2009. – С. 85-93.
13. Белецкий А. Я. Синтез и анализ систем базисных функций Уолша — Кули. / Сб. трудов. Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. — Д.: ДНУ, 2002, т. 6. – С. 44-55.
14. Белецкий А. Я. Синтез симметрических систем Уолша. // Киберн. и вычисл. техника, 2003, Вып.141. – С. 50-67.
15. Белецкий А. Я. Структурированные коды Грея. // Успехи современной радиоэлектроники. — 2003, № 11. – С. 3–22.

- 16.Белецкий А. Я., Белецкий Е. А. Прямая и обратная задачи Уолша. Материалы XI-й МНТК «Авиа-2013». — Киев, НАУ, 21-23 мая 2013. — Том. 4. — С. 24.36-24.39.
- 17.Белецкий А. Я., Белецкий Е. А. Модифицированный Пэли-алгоритм синтеза симметрических нормализованных матриц Адамара. // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки, № 1, 2010. — С. 51-56.
- 18.Белецкий А. Я., Белецкий А. А. Алгоритмы формирования симметрических систем ВКФ. // Электронное моделирование, Т. 27, № 6, 2005. — С. 3-27
- 19.Белецкий А. Я., Демьяник Д. С. Оценка дисперсии гармоник спектра односвязного марковского гауссовского процесса в дискретных базисах Виленкина-Крестенсона функций. // Системи обробки інформації, № 3, 2011. — С. 107-111.
- 20.Білецький А. Я., Кучер О. Г. Синтез симетричних матриць Уолша за методом спрямованої перестановки базисних функцій. // Вісник НАУ. — 2001, № 3. — С. 68-75.
- 21.Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976. — 352 с.
- 22.Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.— М.: Мир, 1989. — 540 с.
- 23.Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1989. — 448 с.
- 24.Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортогональных систем. // Известия АН СССР. Сер. мат., 1949, № 3. — С. 363-400.
- 25.Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. — М.: Наука, 1990. — 180 с.
- 26.Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1990. — 256 с.
- 27.Голубов Б. И. , Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. — М.: Наука, 1987. — 344 с.
- 28.Ен. Функции Уолша и код Грея. // Зарубежная радиоэлектроника, № 7, — 1972. — С. 27-35.
- 29.Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989. — 496 с.
- 30.Зеленков А. В. О формировании симметрических систем функций Виленкина-Крестенсона. // Радиотехника и электроника, № 5, 1982. — С. 921-929.

31. Зеленков А. В. Нерекурсивные алгоритмы спектрального анализа на скользящем интервале в базисе функций Виленкина-Крестенсона. // Радиотехника и электроника, № 12, 1976. – С. 2516-2524.
32. История создания алгоритма быстрого преобразования Фурье. / [www.http://mydebianblog.blogspot.de/2014/07/blog-post.html](http://mydebianblog.blogspot.de/2014/07/blog-post.html)
33. Логинов В. П. Функции Уолша и области их применения (обзор) // Зарубежная радиоэлектроника, № 4, 1973. – С. 73-101.
34. Никитин Г. И. Применение функций Уолша в сотовых системах связи с кодовым разделением каналов. — Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2003. – 86 с.
35. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
36. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. — М.: Техносфера, 2006. – 856 с.
37. Проakis Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
38. Рабинер, Л., Гоуд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. – 849 с.
39. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: — СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
40. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах: — М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
41. Трахтман В. А. Спектральный анализ в базисах функций Виленкина-Крестенсона. // Радиотехника и электроника, № 1, 1975. – С. 130-137.
42. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. — М.: Сов. радио, 1972. – 345 с.
43. Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями: Пер. с англ. — М.: Связь, 1975. – 272 с.
44. Chrestenson H. E. A class of generalised Walsh functions // Pacific J. Math., 1955 v. 5. – P. 17–31.
45. Cooley J.W. and Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of the complex fourier series. *Mathematics Computation*, 19:297-301, 1965.
46. Hadamard M.J., Buii. Sci. Math, 1898, A17, 240.
47. Walsh I. L. Amer. J. Math., 1923, 45, 5.
48. Paley B. E. Proc. London Math. Soc. (2), 1932, 34, 241.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

- Алгоритм БПФ с прореживанием по времени 49
- по частоте 49
- Амплитудно-фазовые характеристики сигнала 10
- Аргумент базисной функции 7

Б

- Базисная функция системы ДЭФ 9
- Быстрое преобразование Фурье с основанием $2 - 44$
- p 49

Д

- Двоично-инверсная перестановка 46
- Дискретное преобразование Фурье 42

И

- Изоморфное отображение матрицы ДЭФ 13
- Индикаторная матрица системы ВКФ 120
- Уолша 91

К

- Каноническая матрица ДЭФ 9
- Квадратичный вычет 109
- невычет 109
- Классические системы Уолша 66
- Комплексная амплитуда гармоника спектра 6
- Континуальный базис преобразования 5
- Коэффициент ряда ДПФ 6

Л

- Линейная связанность частотных шкал процессора ДПФ 75

М

- Материнские системы ДЭФ 18
- Матрица диагонально-факторизованная 31
- ВКФ-Кронекера
- сильно разреженная 26
- строчно-факторизованная 31
- факторизованная 26
- Метод направленной перестановки базисных функций 84

О

- Образующая матрица 92
- – минимальная 96
- Образующая функция системы ДЭФ 17
- Обратная задача Уолша 101
- Оператор «бабочка» 45

П

- Первородная матрица 96
- Полная система вычетов 16
- Порядок базисной функции 16
- Примитивная базисная функция 16, 20
- Пространство отображений 14
- оригиналов 14
- Прямая задача Уолша 101
- Пэли связанные системы Уолша 102

С

- Сестринская система ДЭФ 18
- Символ Лежандра 109
- Системы функций Уолша 65
 - Уолша-Адамара 67
 - Уолша-Качмажа 72
 - Уолша-Кули 74
 - Уолша-Пэли 69

Ф

- Факторизация матриц 26
- Фундаментальные системы функций Уолша 103
 - ВКФ 124

Ч

- Частотная шкала процессора ДПФ входная 11
 - ДПФ выходная 11

ПРИЛОЖЕНИЯ

- Приложение 1.** Индикаторные матрицы систем функций Уолша 16-го порядка..... 178
- Приложение 2.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{3,2}$ 194
- Приложение 3.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{3,3}$ 195
- Приложение 4.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{4,2}$ 202
- Приложение 5.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{5,2}$ 203
- Приложение 6.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{6,2}$ 205
- Приложение 7.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{7,2}$ 207
- Приложение 8.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{8,2}$ 210
- Приложение 9.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{9,2}$ 213
- Приложение 10.** Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{10,2}$ 218

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Индикаторные матрицы систем Уолша 16-го порядка

Матрица: 1				Матрица: 8				Матрица: 15				Матрица: 22			
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 2				Матрица: 9				Матрица: 16				Матрица: 23			
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 3				Матрица: 10				Матрица: 17				Матрица: 24			
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 4				Матрица: 11				Матрица: 18				Матрица: 25			
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 5				Матрица: 12				Матрица: 19				Матрица: 26			
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 6				Матрица: 13				Матрица: 20				Матрица: 27			
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Матрица: 7				Матрица: 14				Матрица: 21				Матрица: 28			
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Матрица: 29	Матрица: 36	Матрица: 43	Матрица: 50
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 0 1
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 0 0	1 1 1 0
0 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 30	Матрица: 37	Матрица: 44	Матрица: 51
0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 0 1 0
0 0 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 1
1 1 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0
0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 31	Матрица: 38	Матрица: 45	Матрица: 52
0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0	0 0 1 0
0 0 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 1 0
1 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 32	Матрица: 39	Матрица: 46	Матрица: 53
0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
0 1 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1
1 0 1 0	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 0
0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 33	Матрица: 40	Матрица: 47	Матрица: 54
0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1	0 0 1 1
0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 1 1
1 1 1 0	1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 1 0
0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 34	Матрица: 41	Матрица: 48	Матрица: 55
0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0	0 0 1 1
0 1 0 0	0 0 0 1	0 1 1 1	0 1 0 1
1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 1 0	1 1 1 0
1 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 35	Матрица: 42	Матрица: 49	Матрица: 56
0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 1
0 1 0 0	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1
1 1 1 0	1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 1 0
1 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0

Матрица: 57	Матрица: 64	Матрица: 71	Матрица: 78
0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 1 0
0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 1 1	0 0 1 1
1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 0 1	1 1 0 1
0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 58	Матрица: 65	Матрица: 72	Матрица: 79
0 1 0 1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 1
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1
1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1	1 1 0 1
0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0
Матрица: 59	Матрица: 66	Матрица: 73	Матрица: 80
0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 1 1	0 1 1 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 0 1
1 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1
1 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 60	Матрица: 67	Матрица: 74	Матрица: 81
0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 1 1
0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 1 1	0 1 0 1
1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1
1 1 0	1 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 61	Матрица: 68	Матрица: 75	Матрица: 82
0 1 0 1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1
1 1 0 1	1 1 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1
1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 62	Матрица: 69	Матрица: 76	Матрица: 83
0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 1 1	0 1 1 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1
1 0 1 1	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0
Матрица: 63	Матрица: 70	Матрица: 77	Матрица: 84
0 1 0 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 1 1 1	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 0 0	0 1 0 0	1 1 0 0	0 1 0 0

Матрица: 85	Матрица: 92	Матрица: 99	Матрица: 106
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 0
0 1 1 1	1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1
1 1 1 1	0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0
0 1 0 0	0 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 86	Матрица: 93	Матрица: 100	Матрица: 107
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1
0 1 0 1	1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 0 1 1	0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0
1 1 0 0	0 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 87	Матрица: 94	Матрица: 101	Матрица: 108
0 1 1 1	0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0
0 1 0 1	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 1 1
1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0
1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 88	Матрица: 95	Матрица: 102	Матрица: 109
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 0 0
0 1 1 1	1 1 1 0	1 1 0 1	1 0 0 0
1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1
1 1 0 0	1 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
Матрица: 89	Матрица: 96	Матрица: 103	Матрица: 110
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 0 0 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 0
0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1
0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0
Матрица: 90	Матрица: 97	Матрица: 104	Матрица: 111
0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 0
1 0 1 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 0
0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0
Матрица: 91	Матрица: 98	Матрица: 105	Матрица: 112
0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 0 0 0	1 0 1 1	1 1 1 1	1 0 1 0
0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
1 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0

Матрица: 113	Матрица: 120	Матрица: 127	Матрица: 134
0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 1 0
1 0 0 0	1 1 1 0	1 1 0 0	1 0 1 1
0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	0 1 0 1
0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0
Матрица: 114	Матрица: 121	Матрица: 128	Матрица: 135
0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 0
1 0 1 0	1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1
0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	0 0 0 1
0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 115	Матрица: 122	Матрица: 129	Матрица: 136
0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 1
1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 0 1	1 0 0 1
0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 0 1	0 0 0 1
1 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 116	Матрица: 123	Матрица: 130	Матрица: 137
0 1 0 1	0 1 0 0	0 1 1 1	0 1 1 1
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1
0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 0 1	0 1 0 1
1 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 117	Матрица: 124	Матрица: 131	Матрица: 138
0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 0
1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 1 1	1 0 1 1
0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 0 1	0 1 0 1
1 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 118	Матрица: 125	Матрица: 132	Матрица: 139
0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 1 1	0 1 1 1
1 1 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 0 1 1
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 0 1	0 1 0 1
0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0	1 0 1 0
Матрица: 119	Матрица: 126	Матрица: 133	Матрица: 140
0 1 0 1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 1 0
1 1 0 0	1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1
0 0 1 1	0 1 1 1	0 1 0 1	0 0 1 1
0 0 1 0	1 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0

Матрица: 141	Матрица: 148	Матрица: 155	Матрица: 162
0 1 1 1	0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1
1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 0 0	1 0 1 1
0 0 1 1	0 1 1 1	1 1 1 0	1 1 0 0
0 0 1 0	1 0 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0
Матрица: 142	Матрица: 149	Матрица: 156	Матрица: 163
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1 0
1 1 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 0 1
0 0 1 1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 0 0
0 0 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 143	Матрица: 150	Матрица: 157	Матрица: 164
0 1 1 1	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1
1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1	1 0 0 1
0 0 1 1	1 1 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 144	Матрица: 151	Матрица: 158	Матрица: 165
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0
1 1 0 1	1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 1 1
0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0
0 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 145	Матрица: 152	Матрица: 159	Матрица: 166
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1
1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 0 1
0 1 1 1	1 1 0 0	1 0 0 0	1 1 0 0
0 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 146	Матрица: 153	Матрица: 160	Матрица: 167
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 1
1 1 0 1	1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 1 1
0 0 1 1	1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0
1 0 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 147	Матрица: 154	Матрица: 161	Матрица: 168
0 1 1 1	0 0 0 1	0 0 1 0	0 0 1 0
1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
0 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 1 0
1 0 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0

Матрица: 169	Матрица: 176	Матрица: 183	Матрица: 190
0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 0
1 1 0 1	1 1 1 1	1 0 0 0	1 1 1 0
1 0 1 0	1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 1 1
0 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
Матрица: 170	Матрица: 177	Матрица: 184	Матрица: 191
0 0 1 0	0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 0
1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 0 0
1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
Матрица: 171	Матрица: 178	Матрица: 185	Матрица: 192
0 0 1 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 0
1 1 0 1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 1 1 0
1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
Матрица: 172	Матрица: 179	Матрица: 186	Матрица: 193
0 0 1 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 1
1 1 1 1	1 0 1 0	1 0 0 0	1 1 1 0
1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 1 1 1
0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	0 1 1 0
Матрица: 173	Матрица: 180	Матрица: 187	Матрица: 194
0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 0
1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 1 0 0
1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1
0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 174	Матрица: 181	Матрица: 188	Матрица: 195
0 0 1 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
1 1 0 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 0
1 0 1 0	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 1 1
1 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0
Матрица: 175	Матрица: 182	Матрица: 189	Матрица: 196
0 0 1 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
1 1 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 0
1 0 1 0	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 1 1
1 1 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 1 0

Матрица: 197	Матрица: 204	Матрица: 211	Матрица: 218
0 1 1 1	0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0
1 0 1 1	1 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0
1 0 0 1	1 0 1 1	0 1 0 0	0 0 1 0
0 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 198	Матрица: 205	Матрица: 212	Матрица: 219
0 1 1 1	0 1 1 0	1 0 0 0	1 0 0 0
1 0 0 1	1 1 1 1	0 1 0 0	0 1 1 0
1 1 0 1	1 0 1 1	0 0 1 0	0 0 1 0
0 1 1 0	1 1 1 0	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 199	Матрица: 206	Матрица: 213	Матрица: 220
0 1 1 0	0 1 1 1	1 0 0 1	1 0 0 0
1 0 1 1	1 1 1 1	0 1 0 0	0 1 0 0
1 0 0 1	1 0 1 1	0 0 1 0	0 1 1 0
1 1 1 0	1 1 1 0	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 200	Матрица: 207	Матрица: 214	Матрица: 221
0 1 1 0	0 1 1 0	1 0 0 0	1 0 1 0
1 0 0 1	1 1 0 1	0 1 1 0	0 0 1 1
1 1 0 1	1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
1 1 1 0	1 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1
Матрица: 201	Матрица: 208	Матрица: 215	Матрица: 222
0 1 1 1	0 1 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1
1 0 1 1	1 1 0 1	0 1 1 0	0 0 1 1
1 1 0 1	1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
1 1 1 0	1 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1
Матрица: 202	Матрица: 209	Матрица: 216	Матрица: 223
0 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 1 0
1 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 0 1
1 0 1 1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 0 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 203	Матрица: 210	Матрица: 217	Матрица: 224
0 1 1 1	1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 1 1
1 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 0 1
1 1 1 1	0 1 0 0	0 1 1 0	0 1 0 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1

Матрица: 225	Матрица: 232	Матрица: 239	Матрица: 246
1 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 0
0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1
1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 0 1	0 0 0 1
Матрица: 226	Матрица: 233	Матрица: 240	Матрица: 247
1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 0 1	1 1 0 1
0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1
0 0 0 1	1 0 0 1	1 0 0 1	0 0 0 1
Матрица: 227	Матрица: 234	Матрица: 241	Матрица: 248
1 0 1 1	1 0 1 1	1 1 0 1	1 1 0 0
0 1 0 1	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1
0 0 0 1	1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 228	Матрица: 235	Матрица: 242	Матрица: 249
1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 1
0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 0 0	0 1 1 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 1 1	0 0 1 1
0 0 0 1	1 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 229	Матрица: 236	Матрица: 243	Матрица: 250
1 0 1 1	1 0 1 1	1 1 0 1	1 1 0 0
0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 0 0	0 1 0 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 1 1	0 1 1 1
0 0 0 1	1 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 230	Матрица: 237	Матрица: 244	Матрица: 251
1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0
0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0
0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1
Матрица: 231	Матрица: 238	Матрица: 245	Матрица: 252
1 0 1 1	1 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1
0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 1 0	0 1 1 0
0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1

Матрица: 253	Матрица: 260	Матрица: 267	Матрица: 274
1 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 0
0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1	0 1 0 0
0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 0
0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1	0 1 0 1
Матрица: 254	Матрица: 261	Матрица: 268	Матрица: 275
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 0 0 1
0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 0
0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	1 0 1 0
0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 1	0 1 0 1
Матрица: 255	Матрица: 262	Матрица: 269	Матрица: 276
1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 0
0 0 1 1	0 1 1 1	0 0 1 0	0 1 1 0
0 0 0 1	0 0 1 1	1 0 0 0	1 0 1 0
1 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 256	Матрица: 263	Матрица: 270	Матрица: 277
1 1 1 1	1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0
0 0 1 1	0 1 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 0 0 1	0 0 1 1	1 1 0 0	1 1 1 0
1 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 257	Матрица: 264	Матрица: 271	Матрица: 278
1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1
0 0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 1 0 1	0 1 1 1	1 0 0 0	1 1 1 0
1 0 0 1	0 0 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 258	Матрица: 265	Матрица: 272	Матрица: 279
1 1 1 1	1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 1
0 0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 1 0
0 1 0 1	0 1 1 1	1 1 0 0	1 1 1 0
1 0 0 1	0 0 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 259	Матрица: 266	Матрица: 273	Матрица: 280
1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 0
0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 0	0 1 0 0
0 1 0 1	0 0 1 1	1 1 0 0	1 0 1 0
1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1

Матрица: 281	Матрица: 288	Матрица: 295	Матрица: 302
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 0 1 1	0 0 1 0
1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 1
1 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 282	Матрица: 289	Матрица: 296	Матрица: 303
1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 1 1	1 1 0 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0
1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 0 1
1 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1
Матрица: 283	Матрица: 290	Матрица: 297	Матрица: 304
1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0
0 1 0 0	0 0 1 1	0 1 1 1	0 1 0 0
1 1 1 0	1 1 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1
1 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 284	Матрица: 291	Матрица: 298	Матрица: 305
1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 0 0
1 1 1 0	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1
1 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 285	Матрица: 292	Матрица: 299	Матрица: 306
1 0 1 0	1 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 1 0
1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1
0 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 286	Матрица: 293	Матрица: 300	Матрица: 307
1 0 1 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 0
0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	0 1 0 0
1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0	1 1 1 1
0 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1
Матрица: 287	Матрица: 294	Матрица: 301	Матрица: 308
1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 0 1	1 1 0 1
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 0 1	1 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1

Матрица: 309	Матрица: 316	Матрица: 323	Матрица: 330
1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 0	1 0 0 0
0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1	1 0 1 0
1 1 1 1	1 1 0 1	1 1 1 1	0 1 0 0
0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1
Матрица: 310	Матрица: 317	Матрица: 324	Матрица: 331
1 1 0 0	1 1 1 1	1 1 1 1	1 0 0 1
0 1 0 0	0 0 0 1	0 1 0 1	1 0 0 0
1 0 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1	0 1 0 0
1 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1
Матрица: 311	Матрица: 318	Матрица: 325	Матрица: 332
1 1 0 0	1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 0 0
0 1 0 0	0 0 1 1	0 1 1 1	1 0 1 0
1 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1	0 1 0 0
1 1 0 1	0 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1
Матрица: 312	Матрица: 319	Матрица: 326	Матрица: 333
1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 1
0 1 1 0	0 0 0 1	0 1 1 1	1 0 1 0
1 1 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1	0 1 0 0
1 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1
Матрица: 313	Матрица: 320	Матрица: 327	Матрица: 334
1 1 1 0	1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	1 1 0 0
1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1	0 0 1 0
0 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 0 1 1
Матрица: 314	Матрица: 321	Матрица: 328	Матрица: 335
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 0 1
0 0 0 1	0 0 1 1	0 1 1 1	1 1 0 0
1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1	0 0 1 0
0 1 0 1	1 1 0 1	1 1 0 1	0 0 1 1
Матрица: 315	Матрица: 322	Матрица: 329	Матрица: 336
1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 1	1 0 0 0
0 0 1 1	0 1 1 1	1 0 0 0	1 1 1 0
1 0 0 1	1 0 1 1	0 1 0 0	0 0 1 0
0 1 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1

Матрица: 337	Матрица: 344	Матрица: 351	Матрица: 358
1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
1 1 1 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 0
0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
Матрица: 338	Матрица: 345	Матрица: 352	Матрица: 359
1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0
1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 0
0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0	0 0 0 1
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
Матрица: 339	Матрица: 346	Матрица: 353	Матрица: 360
1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 1 1	1 0 1 0
0 1 1 0	0 1 0 0	0 1 1 0	0 0 0 1
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
Матрица: 340	Матрица: 347	Матрица: 354	Матрица: 361
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 0 0
1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 0 0
0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 1 0 1
1 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1
Матрица: 341	Матрица: 348	Матрица: 355	Матрица: 362
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 0	1 1 0 1
1 1 1 0	1 1 0 1	1 1 1 1	1 0 1 0
0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 1
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 0 1 1
Матрица: 342	Матрица: 349	Матрица: 356	Матрица: 363
1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 1 0	1 1 0 0
1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 1	1 0 0 0
0 1 1 0	0 0 1 0	0 1 1 0	0 0 0 1
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
Матрица: 343	Матрица: 350	Матрица: 357	Матрица: 364
1 0 0 1	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 0 1
1 1 0 0	1 1 1 1	1 0 0 0	1 0 0 0
0 1 1 0	0 0 1 0	0 0 0 1	0 0 0 1
1 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1

Матрица: 365	Матрица: 372	Матрица: 379	Матрица: 386
1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 0
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 0 1
0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 0 1	0 1 1 1
1 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
Матрица: 366	Матрица: 373	Матрица: 380	Матрица: 387
1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 1 1	1 1 1 1
1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 0 1
0 1 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 1
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
Матрица: 367	Матрица: 374	Матрица: 381	Матрица: 388
1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 0
1 0 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1
0 1 0 1	0 0 0 1	0 1 0 1	0 1 1 1
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	1 0 1 1
Матрица: 368	Матрица: 375	Матрица: 382	Матрица: 389
1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 1
1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 1	1 0 1 0
0 1 1 1	0 0 0 1	0 1 1 1	1 0 0 0
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 1 1
Матрица: 369	Матрица: 376	Матрица: 383	Матрица: 390
1 1 0 0	1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 0 1
1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 1 1	1 0 0 0
0 1 1 1	0 0 0 1	0 1 1 1	1 1 0 0
0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 1 1
Матрица: 370	Матрица: 377	Матрица: 384	Матрица: 391
1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 1	1 0 0 0
1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 0
0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 1	1 1 0 0
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1
Матрица: 371	Матрица: 378	Матрица: 385	Матрица: 392
1 1 0 0	1 1 1 1	1 1 1 0	1 0 0 1
1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 1 1	1 0 1 0
0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 1	1 1 0 0
1 0 1 1	0 0 1 1	1 0 1 1	0 1 1 1

Матрица: 393	Матрица: 400	Матрица: 407	Матрица: 414
1 0 0 1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1
1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 1 1
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 0 0	1 0 1 0
1 1 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 394	Матрица: 401	Матрица: 408	Матрица: 415
1 0 0 1	1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 0 1
1 1 0 0	1 0 1 0	1 1 0 0	1 1 1 0
1 1 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 395	Матрица: 402	Матрица: 409	Матрица: 416
1 0 0 0	1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 0
1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 1
1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 0 0	1 1 1 0
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 396	Матрица: 403	Матрица: 410	Матрица: 417
1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 1 1
1 1 0 0	1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 1 1
1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 0 0	1 1 1 0
0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 397	Матрица: 404	Матрица: 411	Матрица: 418
1 0 0 1	1 0 0 1	1 0 1 0	1 0 1 1
1 1 0 0	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 0 0	1 0 1 0
0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
Матрица: 398	Матрица: 405	Матрица: 412	Матрица: 419
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1	1 0 1 0
1 1 1 0	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 0 1
1 0 1 0	1 0 0 0	1 1 0 0	1 1 1 0
0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
Матрица: 399	Матрица: 406	Матрица: 413	Матрица: 420
1 0 0 0	1 0 1 1	1 0 1 0	1 0 1 1
1 1 0 0	1 0 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
1 1 1 0	1 0 0 0	1 1 0 0	1 1 1 0
0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1

Матрица: 421	Матрица: 428	Матрица: 435	Матрица: 442
1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 1 0
1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 0 1
1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
Матрица: 422	Матрица: 429	Матрица: 436	Матрица: 443
1 1 0 1	1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 0
1 0 0 0	1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 1 1
1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
0 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
Матрица: 423	Матрица: 430	Матрица: 437	Матрица: 444
1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 1 0
1 0 1 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1
0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 424	Матрица: 431	Матрица: 438	Матрица: 445
1 1 0 0	1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 1 1
1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 0 1	1 1 0 1
1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1
0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 425	Матрица: 432	Матрица: 439	Матрица: 446
1 1 0 0	1 1 0 0	1 1 1 0	1 1 1 0
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 1 1
1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 1
1 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 426	Матрица: 433	Матрица: 440	Матрица: 447
1 1 0 1	1 1 0 1	1 1 1 1	1 1 1 0
1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 1	1 1 1 1
1 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
Матрица: 427	Матрица: 434	Матрица: 441	Матрица: 448
1 1 0 1	1 1 0 1	1 1 1 0	1 1 1 0
1 0 1 0	1 1 0 0	1 0 1 1	1 1 0 1
1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 0 1	1 0 1 1
1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Таблица индикаторных матриц систем ВКФ $V_{3,2}$

01		02
10		
20		

10		11		12
01				
11				
21				

20		21		22
02				
12				
22				

Примечание:

Для всех индикаторных матриц второго порядка принята следующая система обозначений. Верхняя пара цифр определяет номер столбца, а нижняя – номер строки таблицы. Например, матрица, помеченная черным квадратом в нижней таблице

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

является правосторонне симметрической индикаторной матрицей.

Затемненные клетки в таблице означают, что соответствующих индикаторных матриц не существует. Например, для средней таблицы Приложения 2 недопустимыми являются такие варианты индикаторных матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

поскольку первая из них обращается в нуль (точнее в вектор с нулевыми компонентами) при умножении ее слева по модулю $m = 3$ на вектор-строку (1,2) или (2,1), а вторая – при умножении на вектор-строку (1,1) или (2,2).

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{3,3}$**

0	1	2	0	1	2	0	1	2
				001 010 100	002 010 100		001 020 100	002 020 100
				001 010 200	002 010 200		001 020 200	002 020 200
	001 100 010	002 100 010		001 110 010	002 110 010		001 120 010	002 120 010
	001 100 110	002 100 110					001 120 110	002 120 110
	001 100 210	002 100 210		001 110 210	002 110 210			
	001 200 020	002 200 020		001 210 020	002 210 020		001 220 020	002 220 020
	001 200 120	002 200 120					001 220 120	002 220 120
	001 200 220	002 200 220		001 210 220	002 210 220			
010 001 100	011 001 100	012 001 100	010 011 100		012 011 100	010 021 100	011 021 100	
010 001 200	011 001 200	012 001 200	010 011 200		012 011 200	010 021 200	011 021 200	
	011 101 010	012 101 010		011 111 010	012 111 010		011 121 010	012 121 010
010 101 110	011 101 110		010 111 110	011 111 110	012 111 110	010 121 110		012 121 110

Продолжение ПЗ

010		012	010	011		010	011	012
101		101	111	111		121	121	121
210		210	210	210		210	210	210
	011	012		011	012		011	012
	201	201		211	211		221	221
	020	020		020	020		020	020
010	011		010	011	012	010		012
201	201		211	211	211	221		221
120	120		120	120	120	120		120
010		012	010	011		010	011	012221
201		201	211	211		221	221	220
220		220	220	220		220	220	
020	021	022	020		022	020	021	
002	002	002	012		012	022	022	
100	100	100	100		100	100	100	
020	021	022	020		022	020	021	
002	002	002	012		012	022	022	
200	200	200	200		200	200	200	
	021	022		021	022		021	022
	102	102		112	112		122	122
	010	010		010	010		010	010
020	021		020	021	022	020		022
102	102		112	112	112	122		122
110	110		110	110	110	110		110
020		022	020	021		020	021	022
102		102	112	112		122	122	122
210		210	210	210		210	210	210
	021	022		021	022		021	022
	202	202		212	212		222	222
	020	020		020	020		020	020
020	021		020	021	022	020		022
202	202		212	212	212	222		222
120	120		120	120	120	120		120
020		022	020	021		020	021	022
202		202	212	212		222	222	222
220		220	220	220		220	220	220

Продолжение ПЗ

0	1	2	0	1	2	0	1	2
100	101	102	100	101	102			
010	010	010	020	020	020			
001	001	001	001	001	001			
100		102	100		102			
010		010	020		020			
101		101	101		101			
100	101		100	101				
010	010		020	020				
201	201		201	201				
	101	102	100	101		100		102
	100	100	110	110		120		120
	011	011	011	011		011		011
	101	102	100	101	102	100	101	
	100	100	110	110	110	120	120	
	111	111	111	111	111	111	111	
	101	102	100		102	100	101	102
	100	100	110		110	120	120	120
	211	211	211		211	211	211	211
	101	102	100	101		100		102
	200	200	210	210		220		220
	021	021	021	021		021		021
	101	102	100	101	102	100	101	
	200	200	210	210	210	220	220	
	121	121	121	121	121	121	121	
	101	102	100		102	100	101	102
	200	200	210		210	220	220	220
	221	221	221		221	221	221	221
			110	111	112	110	111	112
			011	011	011	021	021	021
			001	001	001	001	001	001
110	111	112	110	111			111	112
001	001	001	011	011			021	021
101	101	101	101	101			101	101
110	111	112		111	112	110		112
001	001	001		011	011	021		021
201	201	201		201	201	201		201

Продолжение ПЗ

0	1	2	0	1	2	0	1	3
110	111		110		112		111	112
101	101		111		111		121	121
011	011		011		011		011	011
110		112				110		112
101		101				121		121
111		111				111		111
	111	112	110		112	110	111	112
	101	101	111		111	121	121	121
	211	211	211		211	211	211	211
110		112		111	112	110	111	
201		201		211	211	221	221	
021		021		021	021	021	021	
	111	112	110	111	112	110	111	
	201	201	211	211	211	221	221	
	121	121	121	121	121	121	121	
110	111		110	111				
201	201		211	211				
221	221		221	221				
			120	121	122	120	121	122
			012	012	012	022	022	022
			001	001	001	001	001	001
120	121	122	120	121			121	122
002	002	002	012	012			022	022
101	101	101	101	101			101	101
120	121	122		121	122	120		122
002	002	002		012	012	022		022
201	201	201		201	201	201		201
120		122		121	122	120	121	
102		102		112	112	122	122	
011		011		011	011	011	011	
	121	122	120	121	122	120	121	
	102	102	112	112	112	122	122	
	111	111	111	111	111	111	111	
120	121		120	121				
102	102		112	112				
211	211		211	211				

Продолжение ПЗ

0	1	2	0	1	2	0	1	3
120	121		120		122		121	122
202	202		212		212		222	222
021	021		021		021		021	021
120		122				120		122
202		202				222		222
121		121				121		121
	121	122	120		122	120	121	122
	202	202	212		212	222	222	222
	221	221	221		221	221	221	221
			200	201	202	200	201	202
			010	010	010	020	020	020
			002	002	002	002	002	002
			200		202	200		202
			010		010	020		020
			102		102	102		102
			200	201		200	201	
			010	010		020	020	
			202	202		202	202	
	201	202	200	201		200		202
	100	100	110	110		120		120
	012	012	012	012		012		012
	201	202	200	201	202	200	201	
	100	100	110	110	110	120	120	
	112	112	112	112	112	112	112	
	201	202	200		202	200	201	202
	100	100	110		110	120	120	120
	212	212	212		212	212	212	212
	201	202	200	201		200		202
	200	200	210	210		220		220
	022	022	022	022		022		022
	201	202	200	201	202	200	201	
	200	200	210	210	210	220	220	
	122	122	122	122	122	122	122	
	201	202	200		202	200	201	202
	200	200	210		210	220	220	220
	222	222	222		222	222	222	222

Продолжение ПЗ

0	1	2	0	1	2	0	1	2
			210 011 002	211 011 002	212 011 002	210 021 002	211 021 002	212 021 002
210 001 102	211 001 102	212 001 102	210 011 102	211 011 102			211 021 102	212 021 102
210 001 202	211 001 202	212 001 202		211 011 202	212 011 202	210 021 202		212 021 202
210 101 012		212 101 012		211 111 012	212 111 012	210 121 012	211 121 012	
	211 101 112	212 101 112	210 111 112	211 111 112	212 111 112	210 121 112	211 121 112	
210 101 212	211 101 212		210 111 212	211 111 212				
210 201 022	211 201 022		210 211 022		212 211 022		211 221 022	212 221 022
210 201 122		212 201 122				210 221 122		212 221 122
	211 201 222	212 201 222	210 211 222		212 211 222	210 221 222	211 221 222	212 221 222
			220 012 002	221 012 002	222 012 002	220 022 002	221 022 002	222 022 002
220 002 102	221 002 102	222 002 102	220 012 102	221 012 102			221 022 102	222 022 102
220 002 202	221 002 202	222 002 202		221 012 202	222 012 202	220 022 202		222 022 202

Продолжение ПЗ

0	1	2	0	1	2	0	1	2
220	221		220		222		221	222
102	102		112		112		122	122
012	012		012		012		012	012
220		222				220		222
102		102				122		122
112		112				112		112
	221	222	220		222	220	221	222
	102	102	112		112	122	122	122
	212	212	212		212	212	212	212
220		222		221	222	220	221	
202		202		212	212	222	222	
022		022		022	022	022	022	
	221	222	220	221	222	220	221	
	202	202	212	212	212	222	222	
	122	122	122	122	122	122	122	
220	221		220	221				
202	202		212	212				
222	222		222	222				

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{4,2}$**

	01		03
	10		
	30		
10	11	12	13
01			
11			
21			
31			
	21		23
	12		
	32		
30	31	32	33
03			
13			
23			
33			

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{5,2}$**

	01	02	03	04
	10			
	20			
	30			
	40			
10	11	12	13	14
01				
11				
21				
31				
41				
20	21	22	23	24
02				
12				
22				
32				
42				

Продолжение П5

30	31	32	33	34
03				
13				
23				
33				
43				
40	41	42	43	44
04				
14				
24				
34				
44				

**ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{6,2}$**

	01				05
	10				
	50				
10	11	12	13	14	15
01					
11					
21					
31					
41					
51					
	21		23		25
	12				
	32				
	52				
	31	32		34	35
	13				
	23				
	43				
	53				

Продолжение П6

	41			43		45
	14					
	34					
	54					
50	51	52	53	54	55	
05						
15						
25						
35						
45						
55						

**ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{7,2}$**

	01	02	03	04	05	06
	10					
	20					
	30					
	40					
	50					
	60					
10	11	12	13	14	15	16
01						
11						
21						
31						
41						
51						
61						
20	21	22	23	24	25	26
02						
12						
22						
32						
42						
52						
62						

Продолжение П7

30	31	32	33	34	35	36
03						
13						
23						
33						
43						
53						
63						
40	41	42	43	44	45	46
04						
14						
24						
34						
44						
54						
64						

Продолжение П7

50			52	53	54	55	56
05							
15							
25							
35							
45							
55							
65							
60	61	62	63	64	65	66	
06							
16							
26							
36							
46							
56							
66							

**ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{8,2}$**

	01		03		05		07
	10						
	30						
	50						
	70						
10	11	12	13	14	15	16	17
01							
11							
21							
31							
41							
51							
61							
71							
	21		23		25		27
	12						
	32						
	52						
	72						

Продолжение П8

30	31	32	33	34	35	36	37
03							
13							
23							
33							
43							
53							
63							
73							
	41		43		45		47
	14						
	34						
	54						
	74						
50	51	52	53	54	55	56	57
05							
15							
25							
35							
45							
55							
65							
75							

Продолжение П8

	61		63		65		67
	16						
	36						
	56						
	76						
70	71	72	73	74	75	76	77
07							
17							
27							
37							
47							
57							
67							
77							

**ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{9,2}$**

	01	02		04	05		07	08
	10							
	20							
	40							
	50							
	70							
	80							
10	11	12	13	14	15	16	17	18
01								
	■			■			■	
11								
21		■			■			■
31								
	■			■			■	
41								
51		■			■			■
61								
	■			■			■	
71								
81		■			■			■

Продолжение П9

20	21	22	23	24	25	26	27	28
02								
12								
22								
32								
42								
52								
62								
72								
82								
	31	32		34	35		37	38
	13							
	23							
	43							
	53							
	73							
	83							

Продолжение П9

40	41	42	43	44	45	46	47	48
04								
	■			■			■	
14								
		■			■			■
24								
34								
	■			■			■	
44								
		■			■			■
54								
64								
	■			■			■	
74								
		■			■			■
84								
50	51	52	53	54	55	56	57	58
05								
	■			■			■	
15								
		■			■			■
25								
35								
	■			■			■	
45								
		■			■			■
55								
65								
	■			■			■	
75								
		■			■			■
85								

Продолжение П9

	61	62		64	65		67	68
	16							
	26							
	46							
	56							
	76							
	86							
70	71	72	73	74	75	76	77	78
07								
17								
27								
37								
47								
57								
67								
77								
87								

Продолжение П9

80	81	82	83	84	85	86	87	88
08								
18								
28								
38								
48								
58								
68								
78								
88								

**ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Таблица индикаторных матриц
систем ВКФ $V_{10,2}$**

	01		03				07		09
	10								
	30								
	70								
	90								
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
01									
11	■		■		■	■	■		■
21			■					■	
31	■	■	■		■		■		■
41				■					■
51	■		■		■		■		■
61	■					■			
71	■		■		■		■	■	■
81		■					■		
91	■		■	■	■		■		■
	21		23		25		27		29
	12								■
	32		■						
	52								
	72						■		
	92								

Продолжение П10

30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
03									
13									
23									
33									
43									
53									
63									
73									
83									
93									
	41		43		45		47		49
	14								
	34								
	54								
	74								
	94								

Продолжение П10

	51	52	53	54		56	57	58	59
	15								
	25								
	35								
	45								
	55								
	65								
	75								
	85								
	95								
	61		63		65		67		69
	16								
	36								
	56								
	76								
	96								

Продолжение П10

70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
07									
17									
27									
37									
47									
57									
67									
77									
87									
97									
	81		83		85		87		89
	18								
	38								
	58								
	78								
	98								

Продолжение П10

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
09									
19	■		■		■	■	■		■
29			■					■	
39	■	■	■		■		■		■
49				■					■
59	■		■		■		■		■
69	■					■			
79	■		■		■		■	■	■
89		■					■		
99	■		■	■	■		■		■

Люблю книги
ljubljuknigi.ru



yes
I want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов!
Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.ljubljuknigi.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.ljubljuknigi.ru

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscrptum.com
www.omniscrptum.com

OMNIScriptum



